פתרון תרגיל 2 אינפי 3 תשע"ו

16 בנובמבר 2015

1. בכל אחד מהסעיפים נראה שתכונות המטריקה מתקיימות.

(א) $d\left(x,y\right)=\left|\ln\frac{y}{x}\right|$.

i. אי־שליליות: מכיוון שזהו ערך מוחלט, $d\left(x,y\right)\geq0$. כמו כן:

$$x=y\iff\frac{y}{x}=1\iff\left|\ln\frac{y}{x}\right|=0\iff d\left(x,y\right)=0.$$

ii. סימטריות: נשתמש בחוקי הלוגריתם:

$$d\left(x,y\right)=\left|\ln\frac{y}{x}\right|=\left|\ln\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}\right|=\left|\left(-1\right)\cdot\ln\frac{x}{y}\right|=\left|\ln\frac{x}{y}\right|=d\left(y,x\right).$$

iii. אי־שוויון המשולש: שוב, נשתמש בחוקי הלוגריתם:

$$d\left(x,z\right)=\left|\ln\frac{z}{x}\right|=\left|\ln\frac{\frac{z}{y}}{\frac{x}{y}}\right|=\left|\ln\frac{z}{y}-\ln\frac{x}{y}\right|=\left|\ln\frac{y}{x}+\ln\frac{z}{y}\right|$$

בעזרת אי־שוויון המשולש של ערך מוחלט:

$$\left|\ln\frac{y}{x}+\ln\frac{z}{y}\right|\leq\left|\ln\frac{z}{y}\right|+\left|\ln\frac{y}{x}\right|=d\left(x,y\right)+d\left(y,z\right)$$

(ב) $d(x,y)=\begin{cases}\left\Vert x\right\Vert+\left\Vert y\right\Vert & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$.

i. אי־שליליות: נובעת מאי־השליליות של הנורמה.

ii. סימטריות: נובעת מהחילופיות של החיבור.

iii. אי־שוויון המשולש: נובע גם הוא מתכונות הנורמה:

$$d\left(x,z\right)=\left\Vert x\right\Vert+\left\Vert z\right\Vert\leq\left\Vert x\right\Vert+2\left\Vert y\right\Vert+\left\Vert z\right\Vert=d\left(x,y\right)+d\left(y,z\right)$$

(ג) $d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$.

i. אי־שליליות: ישירות מהגדרת המטריקה.

ii. סימטריות: כנ"ל.

iii. אי־שוויון המשולש: גם הוא מיידי.

(ד) $d(X,Y)=rank\left(Y-X\right)$.

i. אי־שליליות: לכל מטריצה A, $rank\left(A\right)\geq 0$. כמו כן:

$$d\left(X-Y\right)=0\iff rank\left(Y-X\right)=0\iff Y-X=0\iff$$

$X=Y$.

שימו לב שמדובר על אפסים שונים, פעם סקלר ממשי ופעם מטריצת האפס.

ii. סימטריות:

$$d(X,Y)=rank\left(Y-X\right)=rank\left(\left(-1\right)\cdot\left(X-Y\right)\right)=rank\left(X-Y\right)=$$

$d\left(Y,X\right)$.

מכיוון שכפל בסקלר שונה מאפס לא משנה את דרגתה של המטריצה.

iii. אי־שוויון המשולש:

$$d\left(X,Z\right)=rank\left(Z-X\right)=rank\left(\left(X-Y\right)+\left(Y-Z\right)\right)\leq$$

מטענה שראיתם בוודאי שאלגברה ליניארית:

$$\leq rank\left(Y-X\right)+rank\left(Z-Y\right)=d\left(X,Y\right)+d\left(Y,Z\right)$$

2. $0\in A'$ כי $lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

מצד שני, אם ניקח סדרה $\left\{x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ אפשר לסדר אותה כתת סדרה של $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ולכן נקודת הגבול היחידה היא 0 וסה"כ $A'=\left\{0\right\}$.

לכן, $A''=\phi$.

אפשר כמובן להסתכל על נקודת ההצטברות לפי ההגדרה, ולראות שלמעט 0 את כל הנקודות בקבוצה אפשר להקיף בכדור מספיק קטן שאין לו חיתוך עם הקבוצה (למעט המרכז כמובן).

3. נבדוק האם הקבוצות פתוחות או סגורות:

(א) הקבוצה אינה פתוחה, מכיוון שעבור $\left(\frac{1}{2},0\right)\in A$, לכל $r>0$ מתקיים: $B\left(\left(\frac{1}{2},0\right),r\right)\nsubseteq A$.

הקבוצה אינה סגורה, כי המשלים אינו קבוצה פתוחה; לכל $r>0$, מתקיים $B\left(\left(1,0\right),r\right)\nsubseteq A^{c}$.

(ב) הקבוצה אינה פתוחה, כי עבור $(1,1)\in B$, לכל $r>0$ מתקיים: $B\left(\left(1,1\right),r\right)\subsetneq B$.

הקבוצה סגורה, מכיוון שהמשלים פתוחה; לכל נקודה $(x,y)\in B^{c}$ נסמן את מרחקה מהישר $y=x$ ב$-D$ ואז $B\left(\left(x,y\right),\frac{D}{2}\right)\subseteq B^{c}$.

(ג) הקבוצה פתוחה; לכל $(x,y)\in C$ נסמן את מרחקה מהישר $x+y+1=0$ ב$-D$, ונסמן: $r=\frac{1}{2}\min\left\{ \left|x\right|,\left|y\right|,D\right\}$ ונקבל ש: $B\left(\left(x,y\right),r\right)\subseteq C$.

הקבוצה לא סגורה, כי המשלים אינה פתוחה; עבור $(0,0)\in C^{c}$, לכל $r>0$ $B\left(\left(0,0\right),r\right)\subsetneq C^{c}$ ולכן אינה פתוחה.

4. נבדוק האם הקבוצות פתוחות או סגורות:

(א) הקבוצה לא פתוחה; לכל $r>0$, $B\left(\left(0,0\right),r\right)\subsetneq A$.

הקבוצה סגורה; כל נקודון הוא סגור ואיחוד סופי של סגורות הוא סגור.

האופציות היחידות לנקודות גבול הן $(0,1)\,,(0,0)$ כי A סגורה, אך $B\left(\left(0,1\right),\frac{1}{2}\right),B\left(\left(0,0\right),\frac{1}{2}\right)$ זרים ל$-A$ (למעט מרכזיהם) ולכן אלו לא נקודות גבול.

לכן לקבוצה אין נקודות גבול.

(ב) הקבוצה לא פתוחה; לכל $r>0$, $B\left(\left(0,1\right),r\right)\nsubseteq B$.

הקבוצה לא סגורה, מכיוון שמשלימתה אינה פתוחה; $(1,0)\in B^{c}$ אך לכל $r>0$, $B\left(\left(1,0\right),r\right)\nsubseteq B^{c}$.

הקבוצה $\left\{ (x,y)\,|x^{2}+y^{2}<1\right\}$ היא כדור פתוח, לכן פתוחה ולכן כל הנקודות בה הן נקודות גבול.

גם נקודות הקבוצה $\left\{ (x,y)\,|x^{2}+y^{2}=1\right\}$ הן נקודות גבול, כי לכל $(x,y)\in\left\{ (x,y)\,|x^{2}+y^{2}=1\right\}$ ולכל $r>0$ אפשר לקחת $r'=\min\left\{ 1,r\right\}$ ואז:

$$\left(\left(1-\frac{r'}{2}\right)x,\left(1-\frac{r'}{2}\right)y\right)\in B\cap B\left(\left(x,y\right),r\right)$$

כל נקודה (x,y) אחרת אינה נקודת גבול (נסמן את מרחקה מהמעגל $\left\{ (x,y)\,|x^{2}+y^{2}=1\right\}$

ב$-D$ ואז הכדור $B\left((x,y),\frac{D}{2}\right)$ זר ל$-B$, ולכן קבוצת נקודות הגבול היא

$$\left\{(x,y)\,|x^2+y^2\leq 1\right\}$$

(ג) הקבוצה פתוחה; לכל $(x,y)\in C$ נסמן: $r=\frac{1}{2}\min\{|x|,|y|\}$ ואז:

$B((x,y),r)\subseteq C$, כי אם $(a,b)\in B((x,y),r)$ אז:

$$|a-x|<\sqrt{|x-a|^2+|y-b|^2}<r\leq\frac{1}{2}|x|$$

ולכן:

$$a>|x|-\frac{1}{2}|x|>0$$

באופן דומה, $|b-y|<\frac{1}{2}|y|$ ולכן:

$$b<y+\left|\frac{1}{2}y\right|=-|y|+\frac{1}{2}|y|<0$$

וסה"כ: $(a,b)\in C$.

הקבוצה לא סגורה, כי משלימתה אינה פתוחה; $(0,0)\in C^c$ אך לכל $r>0$, $B((0,0),r)\nsubseteq C$.

הקבוצה פתוחה, ולכן כל $(x,y)\in C$ היא נקודת גבול.

יתר על כן, גם הנקודות: $\{(x,y)\,|y=0,x\geq 0\}\cup\{(x,y)\,|x=0,y\leq 0\}$ הן נקודות גבול, כי לכל (x,y) כזו ולכל $r>0$,

$$\left(x+\frac{r}{2},y-\frac{r}{2}\right)\in B((x,y),r)\cap C$$

נקודות אחרות אינן נקודות גבול (קל לראות) ולכן בסה"כ נקודות הגבול הן $\{(x,y)\,|x\geq 0,y\geq 0\}$.

5. ניתן דוגמה בכל אחד מהסעיפים כמבוקש.

(א) נתבונן באוסף הנקודונים $\left\{\frac{1}{n}\right\}\subseteq\mathbb{R}$ כאשר $n\in\mathbb{N}$. כמו שראינו, כל נקודון ב$-\mathbb{R}$ הוא קבוצה סגורה (כל נקודון הוא קבוצה סגורה בכל מרחב מטרי), אך האיחוד: $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ אינו קבוצה סגורה, מכיוון ש-0 הוא נקודת הצטברות של הקבוצה אך לא שייך אליה.

(ב) נתבונן באוסף הקטעים הפתוחים $\left(1-\frac{1}{2n},1+\frac{1}{2n}\right)\subseteq\mathbb{R}$, כאשר $n\in\mathbb{N}$. כל קטע פתוח הוא קבוצה פתוחה, אך החיתוך הוא: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{1}{2n},1+\frac{1}{2n}\right)=$ $\{1\}$ נקודון וכמו שראינו נקודון ב־$\mathbb{R}$ אינו קבוצה פתוחה.

(ג) לפי היינה־בורל, נחפש מרחב שאינו מהצורה $\mathbb{R}^n$.

אם כך, נבחר את הקבוצה $\mathbb{Z}$ עם המטריקה הדיסקרטית, ונתבונן בקבוצה $\mathbb{Z}$ כולה.

הקבוצה $\mathbb{Z}$ סגורה כי היא כל המרחב.

הקבוצה $\mathbb{Z}$ חסומה; מהגדרת המטריקה הדיסקרטית, $\mathbb{Z}\subseteq B\left(0,2\right)$.

עם זאת, הקבוצה $\mathbb{Z}$ אינה קומפקטית, מכיוון שלכיסוי הפתוח $\{\{a\}:a\in\mathbb{Z}\}$ שלה אין תת־כיסוי סופי. זהו אכן כיסוי פתוח, מכיוון שבמטריקה הדיסקרטית כל קבוצה (ובפרט הנקודונים) היא פתוחה.

6. לאו דווקא. נתבונן בסדרה $x_n=(-1)^n(1-\frac{1}{n})$ ב־$\mathbb{R}$. $|x_n|<1$ ולכן חסומה.

$$d_2(x_n,0)=|x_n|=1-\frac{1}{n}$$

עולה ממש, אך הסדרה לא מתכנסת.