פתרונות לשאלות ממבחנים

לנוחיותכם, השאלות שפתרנו בשיעור החזרה, עם פתרונות.

שאלה 1. תשע"ג א',א'. תהי G הקבוצה של שלשות של מספרים שלמים, עם פעולה בינארית שמוגדרת כך:

$$(k_1,k_2,k_3)\cdot(l_1,l_2,l_3)=\left(k_1+(-1)^{k_3}l_1,k_2+l_2,k_3+l_3\right)$$

הוכיחו ש־ $(G,\cdot)$ חבורה, והוכיחו ש: $N=\langle(1,0,0)\rangle$ תת-חבורה נורמלית.

פתרון. נראה שהתכונות הדרושות מתת-חבורה מתקיימות.

סגירות לפעולה: חיבור של מספרים שלמים הוא מספר שלם, מכפלת מספרים שלמים היא מספר שלם, ולכן הפעולה סגורה.

קיבוציות: קצת לכתוב:

$$((k_1,k_2,k_3)\cdot(l_1,l_2,l_3))\cdot(m_1,m_2,m_3)=\left(k_1+(-1)^{k_3}l_1,k_2+l_2,k_3+l_3\right)\cdot(m_1,m_2,m_3)$$

$$=\left(k_1+(-1)^{k_3}l_1+(-1)^{k_3+l_3}m_1,k_2+l_2+m_2,k_3+l_3+m_3\right)=$$

$$=\left(k_1+(-1)^{k_3}\left(l_1+(-1)^{l_3}m_1\right),k_2+l_2+m_2,k_3+l_3+m_3\right)=$$

$$=(k_1,k_2,k_3)\cdot\left(l_1+(-1)^{l_3}m_1,l_2+m_2,l_3+m_3\right)=(k_1,k_2,k_3)\cdot((l_1,l_2,l_3)\cdot(m_1,m_2,m_3))$$

והפעולה אכן קיבוצית.

קיום איבר נייטרלי:

$$(k_1,k_2,k_3)\cdot(0,0,0)=\Big(k_1+(-1)^{k_3}\cdot 0,k_2+0,k_3+0\Big)=(k_1,k_2,k_3)$$

$$(0,0,0)\cdot(k_1,k_2,k_3)=\Big(0+(-1)^{0}\cdot k_1,0+k_2,0+k_3\Big)=(k_1,k_2,k_3)$$

לכל $(k_1,k_2,k_3)\in G$, ולכן $(0,0,0)\in G$ הוא נייטרלי לחיבור.

קיום איבר הופכי: מתקיים:

$$(k_1,k_2,k_3)\cdot\Big((-1)^{-k_3-1}k_1,-k_2,-k_3\Big)=(0,0,0)$$

וכך גם מצד שני, כלומר לכל $(k_1,k_2,k_3)\in G$ יש איבר הופכי:

$$(k_1,k_2,k_3)^{-1}=\Big((-1)^{-k_3-1}k_1,-k_2,-k_3\Big)$$

כל התכונות הדרושות מתקיימות ולכן $(G,\cdot)$ חבורה.

כעת, מכיוון ש-N נוצרת על ידי איבר היא תת-חבורה, ונותר להראות שהיא נורמלית.

לפי ההגדרה, עלינו להראות שלכל $g\in G$ מתקיים $gN=Ng$. פירוש הדבר שעלינו להראות שלכל $n_1\in N$ קיים $n_2\in N$ המקיים: $gn_1=n_2g$ (ולהיפך, אבל הכיוונים מאד דומים).

מי האיברים של N? $N=\left\{(1,0,0)^k\,|k\in\mathbb{Z}\right\}$, ואפשר לראות:

$$(1,0,0)^2=(1,0,0)\cdot(1,0,0)=\Big(1+(-1)^0\cdot 1,0+0,0+0\Big)=(2,0,0)$$

$$(1,0,0)^3=(2,0,0)\cdot(1,0,0)=\Big(2+(-1)^0\cdot 1,0+0,0+0\Big)=(3,0,0)$$

וגם:

$$(1,0,0)^{-1}=(-1,0,0)$$

ולכן: $N=\{(n,0,0)\,|n\in\mathbb{Z}\}$. כעת, נסמן $g=(a,b,c)$. יהי $x\in gN$, נראה ש:

$x \in Ng$ (שוב, זה כיוון אחד של ההכלה, והשני דומה).

$x \in gN$, ולכן קיים $(n,0,0) \in N$ עבורו:

$$x = (a,b,c) \cdot (n,0,0) = (a + (-1)^c n, b, c)$$

כעת, $((-1)^c n,0,0) \in N$ מקיים:

$$((-1)^c n, 0, 0) \cdot (a,b,c) = x$$

כלומר $x \in Ng$, כפי שרצינו. לכן N נורמלית.

שאלה 2. תשע"ג א',א'. תהי G חבורה ותהי $H \leq G$ תת-חבורה. תהי C מחלקה שמאלית של H ב-G. יהיו $a,b,c \in C$. הוכיחו שמתקיים $ab^{-1}c \in C$.

פתרון. C מחלקה שמאלית, כלומר קיים $g \in G$ עבורו $C = gH$.

$a,b,c \in C$, ולכן קיימים $h_1,h_2,h_3 \in C$ המקיימים: $a = gh_1,\ b = gh_2,\ c = gh_3$.

כעת:

$$ab^{-1}c = gh_1 (gh_2)^{-1} gh_3 = gh_1h_2^{-1}g^1gh_3 = gh_1h_2^{-1}h_3$$

H תת-חבורה ולכן סגורה לפעולה ולהופכי, ולכן $h_1h_2^{-1}h_3 \in H$, ומכאן $gh_1h_2^{-1}h_3 \in gH$. כלומר, $ab^{-1}c \in C$, כנדרש.

שאלה 3. תשע"ג א',ב'. תהי G חבורה. הוכיחו ש-G אבלית אם ורק אם הפונקציה $f : G \to G$ המוגדרת על ידי $f(g) = g^{-1}$ היא איזומורפיזם.

פתרון. ראשית, נשים לב שלכל $g \in G$, $f(g^{-1}) = (g^{-1})^{-1} = g$, והפונקציה f על.

שנית, מכיוון שלכל איבר יש הופכי יחיד, אם $g \neq h$ גם $g^{-1} \neq h^{-1}$ כלומר $f(g) \neq f(h)$ והפונקציה חח"ע.

אם כן, אנו צריכים להוכיח את הטענה הבאה: G אבלית $\iff$ f הומומורפיזם.

אם G אבלית, מתקיים:

$$f(gh) = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = g^{-1}h^{-1} = f(g)f(h)$$

ו$f-$ אכן הומומורפיזם; המעבר $h^{-1}g^{-1}=g^{-1}h^{-1}$ נובע מכך ש$G-$ אבלית.

לצד שני, אם f הומומורפיזם, לכל $g,h\in G$ מתקיים:

$$gh=f\left(g^{-1}\right)f\left(h^{-1}\right)=f\left(g^{-1}h^{-1}\right)=\left(g^{-1}h^{-1}\right)^{-1}=hg$$

ו$G-$ אכן אבלית.

שאלה 4. תשע"ד א',א'. תהי G חבורה כך שלכל $x,y\in G$, מתקיים: $(xy)^{5774}=x^{5774}y^{5774}$. נגדיר שתי תתי-קבוצות:

$$H=\left\{g^{5774}|g\in G\right\},\quad K=\left\{g\in G|g^{5774}=e\right\}$$

א. הוכיחו ש$H,K-$ הן תת-חבורות נורמליות.

ב. הוכיחו: $G/K\cong H$.

פתרון. ראשית נראה שהקבוצות H,K הן תתי-חבורות ולאחר מכן נראה שהן נורמליות.

לפי הקריטריון המקוצר, מספיק להראות שלכל $h_1,h_2\in H$, גם $h_1h_2^{-1}\in H$.

אם כן, לפי הגדרת H, קיימים $g_1,g_2\in H$ עבורם: $h_1=g_1^{5774},h_2=g_2^{5774}$. כעת:

$$h_1h_2^{-1}=g_1^{5774}\left(g_2^{5774}\right)^{-1}=g_1^{5774}\left(g_2^{-1}\right)^{5774}=\left(g_1g_2^{-1}\right)^{5774}$$

המעבר האחרון נובע מהנתון. $g_1g_2^{-1}\in G$ ולכן מהגדרת H, $h_1h_2^{-1}=\left(g_1g_2^{-1}\right)^{5774}\in H$ כנדרש. לכן H תת-חבורה.

באופן דומה, יהיו $k_1,k_2\in K$ ונראה שגם $k_1k_2^{-1}\in K$. אם כן:

$$\left(k_1k_2^{-1}\right)^{5774}=k_1^{5774}\left(k_2^{-1}\right)^{5774}=e\left(k_2^{5774}\right)^{-1}=e^{-1}=e$$

ומהגדרת K, נקבל שאכן $k_1k_2^{-1}\in K$ כנדרש. לכן K תת-חבורה.

כעת, נראה ש$H-$ נורמלית. להראות שלכל $g\in G$ מתקיים: $gHg^{-1}\subseteq H$.

אם כן, יהי $x\in gHg^{-1}$. קיים $h\in H$ עבורו $x=ghg^{-1}$.

מהגדרת H, קיים $g_1 \in G$ עבורו $h = g_1^{5774}$. כעת:

$$\left(gg_1g^{-1}\right)^{5774} = gg_1g^{-1}gg_1g^{-1} \ldots gg_1g^{-1} = gg_1^{5774}g^{-1} = ghg^{-1} = x$$

מכיוון ש: $gg_1g \in G$, נקבל מהגדרת H שאכן $x = \left(gg_1g^{-1}\right)^{5774} \in H$ כנדרש, ולכן H נורמלית.

ב. נגדיר הומומורפיזם $f : G \to H$ על ידי: $f\left(g\right) = g^{5774}$.

נראה שזה אכן הומומורפיזם:

$$f\left(gh\right) = \left(gh\right)^{5774} = g^{5774}h^{5774} = f\left(g\right)f\left(h\right)$$

המעבר האמצעי נובע מהנתון.

כעת, מהגדרת ההומומורפיזם נקבל $imf = H$, ואם $k \in K$ מתקיים:

$$f\left(k\right) = k^{5774} = e$$

כלומר $k \in \ker f$, ומצד שני אם $k \in \ker f$ אז $f\left(k\right) = k^{5774} = e$ ולכן $k \in K$, כלומר $K = \ker f$.

מכיוון ש$-f$ על, הומומורפיזם והגרעין הוא K, ממשפט האיזומורפיזם הראשון נקבל שאכן:

$$G/K \cong H$$

כעת, מכיוון ש$-K$ היא גרעין של הומומורפיזם שתחומו הוא G, אנו יודעים שגם היא תת-חבורה נורמלית של G.

שאלה 5. תהי G חבורה. יהיו $g, h \in G$. הוכיחו את השוויון: $o\left(gh\right) = o\left(hg\right)$.

פתרון. ראשית, נוכיח שהטענה נכונה כאשר הסדר סופי. כלומר, $o\left(gh\right) = n$, ונראה שגם $o\left(hg\right) = n$.

מהנתון,

$$(gh)^n = e \Longrightarrow ghghgh \dots ghgh = e$$

כאשר במכפלה יש gh n פעמים. נכפיל משמאל ב$-h$:

$$hghghgh \dots ghgh = h$$

ונכפיל מימין ב$-h^{-1}$:

$$hghghgh \dots hg = e$$

כלומר $(hg)^n = e$, ולכן $o(hg) \leq n$. באופן דומה מראים $o(hg) \leq o(gh)$ וסך הכל $o(gh) = o(hg)$.

כעת, נראה זאת גם במקרה האינסופי. $o(gh) = \infty$, וצריך להראות שגם $o(hg) = \infty$.

נניח בשלילה $o(hg) \neq \infty$. לכן $o(hg)$ סופי, אך ממה שהראנו נקבל שגם $o(gh)$ סופי וסתירה.

לכן $o(hg) = \infty$ כנדרש.

שאלה 6. תהי S קבוצה ונסמן ב$-M$ את קבוצת כל תתי-הקבוצות שלה. בלכ סעיף, בדקו האם $(M, \cdot)$ מונואיד.

א. $A \cdot B = A \cup B$, לכל $A, B \in M$.

ב. $A \cdot B = A \cap B$, לכל $A, B \in M$.

ג. $A \cdot B = A$, לכל $A, B \in M$.

פתרון. בכל סעיף נבדוק את התכונות הדרושות ממונואיד - סגירות, קיבוציות וקיום איבר הופכי.

א. אם $A, B \subseteq S$ גם $A \cup B \subseteq S$ והפעולה סגורה.

איחוד הוא פעולה קיבוצית: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

לכל $A \subseteq S$, מתקיים: $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$, כלומר $A \cdot \emptyset = \emptyset \cdot A$ ולכן $\emptyset \subseteq S$ היא האיבר הנייטרלי.

התכונות מתקיימות וזהו מונואיד.

ב. סגירות וקיבוציות מתקיימות בדומה לאיחוד בסעיף הקודם.

האיבר הנייטרלי במקרה זה הוא S: $A \cap S = S \cap A = A$. שוב, זהו מונואיד.

ג. גם כאן הסגירות ברורה. גם קיבוציות מתקיימת:

$$A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B = A = A \cdot C = (A \cdot C) \cdot B$$

עם זאת, אם קיימות $A, B \in M$ שונות, אין איבר נייטרלי; אם היה e כזה, אז:

$$e = e \cdot C = C \cdot e = C$$

וכל הקבוצות שוות ל$-e$.

מצד שני, אם לא קיימות $A, B \in M$ שונות, אכן יש איבר נייטרלי. זה אפשרי רק כאשר $S = \emptyset$ ואז $M = \{\emptyset\}$, והאיבר הנייטרלי הוא $\emptyset$.

לסיכום, אם $S = \emptyset$ אז M הוא מונואיד, אחרת M אינו מונואיד.

שאלה 7. תשע"ה א',א'. תהי G חבורה **אבלית (!!)** סופית, ויהיו איבריה $g_1, \ldots, g_n$. נסמן: $b = g_1 g_2 \ldots g_n$.

א. הוכיחו $b^2 = e$.

ב. הוכיחו שאם קיים איבר מסדר 2, $o(b) = 2$.

ג. הוכיחו שאם לא קיים איבר מסדר 2, $b = e$.

פתרון. א. מכיוון שלכל איבר יש הופכי, ברשימה $g_1, \ldots, g_n$ מופיעים כל איברי החבורה וההופכיים שלהם.

מכיוון שהחבורה אבלית, אנחנו יכולים לסדר את האיברים במכפלה כך שכל איבר יופיע ליד ההופכי שלו והם יצמצמו זה את זה:

$$b^2 = (g_1 g_2 \ldots g_n)^2 = g_1 g_2 \ldots g_n g_1 g_2 \ldots g_n = g_1 g_1^{-1} g_2 g_2^{-1} \ldots g_n g_n^{-1} = e \cdots e = e$$

כנדרש.

ב. כעת, אם $g_k \in G$ הוא מסדר 2, $g_k \neq e$ ומצד שני $g_k^2 = e$ ולכן $g_k = g_k^{-1}$.

מכיוון שבמכפלה $b = g_1 g_2 \dots g_n$ האיבר g_k מופיע רק פעם אחת, לא נוכל לסדר אותה כך שההופכי שלו יצמצם אותו. לכן $b \neq e$, ולפי א' נקבל שאכן $o(b) = 2$.

ג. מצד שני, אם אין איבר מסדר 2, לכל $g_k \in G$ קיים $l \neq k$ המקיים: $g_k^{-1} = g_l$ (כלומר, g_k שונה מההופכי שלו) או $g_k = e$.

בכל מקרה נוכל לסדר את המכפלה b כך שכל איבר יצטמצם עם ההופכי שלו, ונקבל שאכן $b = e$.