מתמטיקה לכימאים פתרון תרגיל 6

עוזי חרוש ועולא אמארה

תרגיל 1. חשב את טור פורייה של הפונקציות הבאות:

1. $f(x) = x + \pi$

פתרון. ראשית, נחשב את המקדמים a_n, b_n

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx &= \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x+\pi)\,dx &= 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx &= \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x+\pi)\cos(nx)\,dx &= \begin{bmatrix} u = x+\pi & dv = \cos(nx) \\ du = 1 & v = \frac{\sin(nx)}{n} \end{bmatrix} \\ & \frac{1}{\pi}\left[(x+\pi)\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx\right] &= \\ & \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] &= 0 \end{aligned}$$

ו-

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx &= \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x+\pi)\sin(nx)\,dx &= \begin{bmatrix} u = x+\pi & dv = \sin(nx) \\ du = 1 & v = -\frac{\cos(nx)}{n} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-(x+\pi)\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\cos(nx)}{n}dx\right] &= \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-2\pi\frac{\cos(n\pi)}{n} + 0\frac{\cos(-n\pi)}{n} + \underbrace{\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0}\right] &= -\frac{2(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

לכן

$$x \approx \pi + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

2. $f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ -2 & x<0\end{cases}$

פתרון. ראשית, נחשב את המקדמים a_n, b_n

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx &=\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -2dx+\int_{0}^{\pi} 1dx\right) &=\\ & \frac{1}{\pi}\left[-2x|_{-\pi}^{0}+x|_{0}^{\pi}\right] &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx &=\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -2\cos(nx)\,dx+\int_{0}^{\pi}\cos(nx)\,dx\right) &=\\ & \frac{1}{\pi}\left[-2\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right] &= 0\end{aligned}$$

ו-

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx &=\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -2\sin(nx)\,dx+\int_{0}^{\pi}\sin(nx)\,dx\right) &=\\ &= \frac{1}{\pi}\left[2\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right] &=\\ &= \frac{1}{\pi}\left[2\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)+\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\right] &= \begin{cases}0 & n=2k\\ \frac{6}{\pi n} & n=2k-1\end{cases}\end{aligned}$$

לכן

$$f(x)\approx -1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi(2k-1)}\sin((2k-1)x)$$

3. $f(x)=2\sin(3x)$

פתרון. נשים לב ש-$2\sin(3x)$ הוא איבר בטור ולכן הוא הטור עצמו כלומר

$$a_n=0$$

ו-

$$b_n=\begin{cases}2 & n=3\\ 0 & n\neq 3\end{cases}$$

4. $f(x)=|x|$

פתרון. ראשית, נחשב את המקדמים a_n, b_n

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx &&= \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx &&= 0 \\ & \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} xdx &&= \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx &&= \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)\,dx &&= \\ &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\cos(nx)\,dx &&= \begin{bmatrix} u=x & dv=\cos(nx) \\ du=1 & v=\frac{\sin(nx)}{n} \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin(nx)}{n}\bigg|_0^{\pi} - \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx\right] &&= \\ & \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\bigg|_0^{\pi}\right] &&= 0 \\ & \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right] &&= \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2} & n=2k+1 \\ 0 & n=2k \end{cases} \end{aligned}$$

ו-

$$b_n = 0$$

בדקו! לכן

$$|x| \approx \sum_{\substack{n=1 \\ n=2k-1}}^{\infty} -\frac{4}{\pi n^2}\cos(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos((2k-1)x)$$

תרגיל 2. חשבו את $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

פתרון. כזכור מתקיים

$$|\sin x| \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4n^2)}\cos 2nx$$

אם נציב $x=0$ נקבל ש-

$$0 = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4n^2)}\cos(0)$$

$$-\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2}$$

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$