89-198 מתמטיקה בדידה – תרגול 7

פונקציות

הגדרה: תהיינה A, B קבוצות.
יחס $f \subseteq A \times B$ נקרא פונקציה מ A ל B, אם לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ יחיד כך ש $(a,b) \in f$, כלומר
$$\forall a \in A \exists! b \in B: (a,b) \in f$$
נוהגים לסמן את הפונקציה בצורה $f: A \to B$.
אם $(a,b) \in f$ נסמן $f(a) = b$, ונאמר ש b היא התמונה של a (או הערך של f ב a), וכן ש a הוא מקור של b.

דוגמה: תהיינה $A = \{1,2,3\}$ ו $B = \{4,5,6\}$.
א. $f = \{(1,5),(2,4),(3,5)\}$ היא פונקציה מ A ל B.
ב. $g = \{(1,5),(2,4),(1,6)\}$ אינה פונקציה. ל 3 אין תמונה, ואילו ל 1 יש שתי תמונות.

משפט: תהיינה f, g פונקציות מ A ל B. אזי $f = g$ אם ורק אם לכל $a \in A$ מתקיים $f(a) = g(a)$.

משפט: תהיינה $f: A \to B$ ו $g: B \to C$ פונקציות. ההרכבה של f ו g, $g \circ f: A \to C$, היא פונקציה.
בנוסף לכל $a \in A$ מתקיים $g \circ f(a) = g\big(f(a)\big)$.

תרגיל: תהי $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת על ידי $g(x) = 2x + 1$, ותהי $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ פונקציה המוגדרת על ידי $f(x) = x^2 + 4x + 2$. מה היא פונקצית ההרכבה $g \circ f$?
פתרון: נחשב $g\big(f(x)\big) = g(x^2 + 4x + 2) = 2(x^2 + 4x + 2) + 1 = 2x^2 + 8x + 5$
פונקצית ההרכבה $g \circ f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ מוגדרת באופן הבא $g \circ f(x) = 2x^2 + 8x + 5$

הגדרה: תהיינה A, B שתי קבוצות ותהי $f: A \to B$ פונקציה.
1) f היא על אם לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כך ש $f(a) = b$, כלומר $Ran(f) = B$.
2) f היא חד-חד-ערכית (חח"ע או 1:1), אם לכל שני איברים $a_1, a_2 \in A$ מתקיים $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.

דוגמה: תהיינה $A = \{1\}, B = \{2,3\}$. הפונקציה $f: A \to B$ המוגדרת על ידי $f(1) = 2$ היא חח"ע אך לא על.
הפונקציה $g: B \to A$ המוגדרת על ידי $g(2) = 1, g(3) = 1$ היא על אך לא חח"ע.

תרגיל: תהי $A = \mathbb{R} \setminus \{5\}$, ותהי $f: A \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת על ידי $f(x) = \frac{3x}{x-5}$.
הוכח ש f היא חח"ע אך אינה על.
הוכחה:
א. נוכיח ש f היא חח"ע. יהיו $x_1, x_2 \in A$ נניח ש $f(x_1) = f(x_2)$ ונוכיח ש $x_1 = x_2$.
לפי הגדרת f מתקיים $\frac{3x_1}{x_1-5} = \frac{3x_2}{x_2-5}$.
נכפול באלכסון ונחלק ב 3, ונקבל
$$x_1(x_2 - 5) = x_2(x_1 - 5) \Rightarrow x_1 \cdot x_2 - 5x_1 = x_2 \cdot x_1 - 5x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

ב. נראה ש f אינה על, כלומר שקיים $y \in \mathbb{R}$ עבורו לא קיים $x \in A$ כך ש $f(x) = y$.
רעיון ההוכחה: יהי $y \in \mathbb{R}$, נניח ש $y = f(x)$ עבור $x \in A$ וננסה לבטא את x בעזרת y.
$$y = f(x) \Rightarrow y = \frac{3x}{x-5} \Rightarrow y(x-5) = 3x \Rightarrow x(y-3) = 5y$$
עבור $y \neq 3$ ניתן לחלק ב $(y-3)$ ולחלץ את x.
$y = 3$ נראה מועמד טוב להוכיח ש f לא על.
הוכחה: נסתכל על $3 \in \mathbb{R}$.
נניח בשלילה שקיים x שעבורו $f(x) = 3$.
אזי $\frac{3x}{x-5} = 3 \Rightarrow 3x = 3x - 15 \Rightarrow 0 = 15$. סתירה!

<u>תרגיל</u>: תהיינה $f: A \to B, g: B \to C$ פונקציות.
א. הוכח שאם f, g חח"ע אז $g \circ f$ חח"ע.
ב. הוכח שאם f, g על אז $g \circ f$ על.

<u>הוכחה</u>:
א. נניח ש f, g חח"ע ונניח בשלילה ש $g \circ f$ לא חח"ע.
אזי קיימים $a_1, a_2 \in A$ שונים כך ש $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$, כלומר $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$.
נסמן $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2$.
מכיון ש f חח"ע ו $a_1 \neq a_2$, נובע ש $b_1 \neq b_2$.
לכן נקבל $g(b_1) = g(b_2)$ ו $b_1 \neq b_2$. וזו סתירה להנחה ש g היא חח"ע.
לכן אם f, g חח"ע אז $g \circ f$ חח"ע.
ב. נניח ש f, g על ונוכיח ש $g \circ f$ על.
נשים לב ש $g \circ f: A \to C$. יהי $c \in C$.
מכיון ש g על, קיים $b_0 \in B$ כך ש $g(b_0) = c$.
מכיון ש f על, קיים $a_0 \in A$ כך ש $f(a_0) = b_0$.
כעת מתקיים $g \circ f(a_0) = g(f(a_0)) = g(b_0) = c$.

<u>הגדרה</u>: תהיינה A, B קבוצות ותהי $f: A \to B$ פונקציה.
הפונקציה f הפיכה אם היחס ההפוך $f^{-1} \subseteq B \times A$ הוא פונקציה מ B ל A.
$f^{-1}: B \to A$ נקראת הפונקציה ההופכית של f.

<u>משפט</u>: תהי $f: A \to B$ פונקציה. הפונקציה f הפיכה אם ורק אם f חח"ע ועל.

<u>תזכורת</u>: עבור קבוצה A הגדרנו את יחס הזהות $i_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$.
נשים לב ש $i_A: A \to A$ היא פונקציה. פונקציה זו נקראת פונקצית הזהות.
<u>משפט</u>: תהי $f: A \to B$ פונקציה. הפונקציה f הפיכה אם ורק אם קיימת פונקציה $g: B \to A$ עבורה מתקיים $f \circ g = i_B$ ו $g \circ f = i_A$, כלומר לכל $a \in A$ מתקיים $g \circ f(a) = a$ ולכל $b \in B$ מתקיים $f \circ g(b) = b$.
במקרה זה מתקיים $g = f^{-1}$.

<u>תרגיל</u>: בכל סעיף קבעו האם f חח"ע ועל. אם כן, מצאו את הפונקציה ההופכית.
א. $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $B = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, הפונקציה $f: A \to B$ מוגדרת על ידי $f(x) = \frac{1}{x} + 2$.
ב. תהי A קבוצה לא ריקה. נגדיר $f: P(A) \times P(A) \to P(A)$ על ידי $f((X, Y)) = X \cap Y$.

<u>רעיון ההוכחה</u>:
א. נחפש את הפונקציה g ההופכית ל f.
יהי $y \in B$, נניח ש $f(x) = y$ עבור $x \in A$ כלשהו.

$$f(x) = y \Rightarrow \frac{1}{x} + 2 = y \Rightarrow 1 + 2x = yx \Rightarrow x(y - 2) = 1$$

מכיון ש $y \in B$ בפרט $y \neq 2$ ולכן ניתן לחלק ב $y - 2$ ונקבל $x = \frac{1}{y-2}$.

<u>פתרון</u>:
א. נגדיר את $g: B \to A$ להיות $g(y) = \frac{1}{y-2}$. מכיון ש $2 \notin B$ הפונקציה g אכן מוגדרת.
נראה שמתקיים $f \circ g = i_B$ ו $g \circ f = i_A$.
לכל $x \in A$ מתקיים $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x} + 2\right) = \frac{1}{\frac{1}{x} + 2 - 2} = x = i_A(x)$, ולכן $g \circ f = i_A$.
לכל $y \in B$ מתקיים $f \circ g(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{1}{y-2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{y-2}} + 2 = y = i_B(y)$, ולכן $f \circ g = i_B$.
לכן f הפיכה ו g היא הפונקציה ההופכית של f. מהמשפט נובע ש f היא חח"ע ועל.

ב. $f: P(A) \times P(A) \to P(A), f\big((X,Y)\big) = X \cap Y$.

<u>f אינה חח"ע</u>: תהיינה $X,Y \in P(A)$ כך ש $X \neq Y$. ניתן לבחור X,Y כאלו מכיון ש $A \neq \emptyset$.

נשים לב ש $(X,Y),(Y,X) \in P(A) \times P(A)$ ובנוסף $(X,Y) \neq (Y,X)$.

אולם מהקומוטטיביות של חיתוך נקבל ש $X \cap Y = Y \cap X$ ולכן $f\big((X,Y)\big) = f\big((Y,X)\big)$.

<u>f על</u>: תהי $Z \in P(A)$, אזי $(Z,A) \in P(A) \times P(A)$ ומתקיים $f\big((Z,A)\big) = Z \cap A = Z$.

<u>הגדרה</u>: תהי $f: A \to B$ פונקציה ותהי $C \subseteq A$. הצמצום של f על C הוא $f\mid_C = f \cap (C \times B)$.

<u>דוגמה</u>: $A = \{1,2,3\}, B = \{4,5,6\}, C = \{2,3\}$, ותהי $f: A \to B$ המוגדרת כ $f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 4$.

אזי $f\mid_C: C \to B$ מוגדרת כ $f\mid_C(2) = 5, f\mid_C(3) = 4$. שימו לב ש f אינה חח"ע אך $f\mid_C$ חח"ע.

<u>דוגמה</u>: נגדיר $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, ותהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ המוגדרת על ידי $f(x) = x^2$, אזי f על אך אינה חח"ע.

אולם הצמצום של f על $\mathbb{R}^+$, $f\mid_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ היא פונקציה חח"ע ועל.

<u>תרגיל</u>: תהי $f: A \to B$ פונקציה ותהי $C \subseteq A$.

א) הוכח ש $f\mid_C$ היא פונקציה מ C ל B.

ב) הוכח שלכל $x \in C$ מתקיים $f(x) = f\mid_C(x)$.

ג) תהי $g: C \to B$ פונקציה. הוכח ש $g = f\mid_C$ אם ורק אם $g \subseteq f$.

<u>הוכחה</u>:

א) נוכיח ש $f\mid_C$ פונקציה מ C ל B, כלומר שלכל מקור קיימת תמונה והיא יחידה.

<u>קיום</u>: יהי $x \in C$. מכיון ש $C \subseteq A$ נובע ש $x \in A$, ומכיון ש $f: A \to B$ פונקציה קיים $y \in B$ כך ש $(x,y) \in f$.

מכיון ש $x \in C$ ו $y \in B$ נקבל ש $(x,y) \in C \times B$. לכן $(x,y) \in f \cap (C \times B)$, כלומר $(x,y) \in f\mid_C$.

<u>יחידות</u>: נניח שקיימים $y_1, y_2 \in B$ כך ש $(x,y_1) \in f\mid_C$ וגם $(x,y_2) \in f\mid_C$.

בפרט נקבל ש $(x,y_1),(x,y_2) \in f$ ומכיון ש f פונקציה נובע ש $y_1 = y_2$.

לכן $f\mid_C$ היא פונקציה מ C ל B.

ב) נניח בשלילה שקיים $x \in C$ עבורו $f(x) \neq f\mid_C(x)$. נסמן $f(x) = y_1$ ו $f\mid_C(x) = y_2$.

מכיון ש $f\mid_C = f \cap (C \times B)$ בפרט $(x,y_2) \in f$ אך בנוסף $(x,y_1) \in f$ ו $y_1 \neq y_2$.

זו סתירה לכך ש f פונקציה.

לכן לכל $x \in C$ מתקיים $f(x) = f\mid_C(x)$.

ג) ($\Leftarrow$) נניח ש $g = f\mid_C$, כלומר $g = f \cap (C \times B)$.

יהי (x,y) זוג סדור שרירותי ונניח ש $(x,y) \in g$, כלומר $(x,y) \in f \cap (C \times B)$. בפרט נקבל $(x,y) \in f$. לכן $g \subseteq f$.

($\Rightarrow$) נניח ש $g \subseteq f$ ונוכיח $g = f\mid_C$. נראה הכלה דו כיוונית.

תחילה נראה ש $g \subseteq f\mid_C$. מכיון ש $g: C \to B$ פונקציה בפרט נובע ש $g \subseteq C \times B$.

כלומר $g \subseteq f$ ובנוסף $g \subseteq C \times B$, ביחד נקבל ש $g \subseteq f \cap (C \times B)$.

מצד שני, יהי (x,y) שרירותי ונניח ש $(x,y) \in f \cap (C \times B)$, אזי $(x,y) \in f$ וגם $(x,y) \in C \times B$.

מכיון ש $(x,y) \in C \times B$ בפרט $x \in C$, ומכיון ש $g: C \to B$ פונקציה קיים $z \in B$ כך ש $(x,z) \in g$.

בנוסף $g \subseteq f$ לכן $(x,z) \in f$.

כעת $(x,y) \in f$ ו $(x,z) \in f$ ומכיון ש f פונקציה נובע ש $y = z$, לכן $(x,y) \in g$.

נובע מכך ש $f \cap (C \times B) \subseteq g$, ולסיכום נקבל ש $g = f \cap (C \times B)$.

<u>תמונה ותמונה הפוכה</u>

<u>הגדרה</u>: תהי $f: A \to B$ פונקציה ותהיינה $X \subseteq A$ ו $Y \subseteq B$.

התמונה של X תחת f היא הקבוצה

$$f(X) = \{\, f(x) \mid x \in X \,\} = \{\, b \in B \mid \exists x \in X: f(x) = b \,\}$$

התמונה ההפוכה של Y תחת f היא הקבוצה

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$$

<u>הערה</u>: f^{-1} היא לא בהכרח פונקציה, לכן $f^{-1}(y)$ לא בהכרח מוגדר, אך הקבוצה $f^{-1}(\{y\})$ תמיד מוגדרת.

<u>דוגמה</u>: $A = \{1,2,3\}, B = \{a,b,c\}$. נגדיר $f: A \to B$ על ידי $f(1) = a, f(2) = b, f(3) = a$.
אזי $f^{-1}(\{a\}) = \{1,3\}, f^{-1}(\{b\}) = \{2\}, f^{-1}(\{c\}) = \emptyset$

<u>תרגיל</u>: תהי $f: A \to B$ פונקציה ותהיינה Y, X תתי קבוצות של A. הוכח או הפרך:

א. $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.
ב. $Y \subseteq X \Leftrightarrow f(Y) \subseteq f(X)$.

<u>פתרון</u>:

א. נכון. יהי b שרירותי, נוכיח ש $b \in f(X \cup Y) \Leftrightarrow b \in f(X) \cup f(Y)$.

$$b \in f(X \cup Y) \Leftrightarrow \exists a \in X \cup Y: f(a) = b \Leftrightarrow (\exists a \in X: f(a) = b) \vee (\exists a \in Y: f(a) = b) \Leftrightarrow$$
$$b \in f(X) \vee b \in f(Y) \Leftrightarrow b \in f(X) \cup f(Y)$$

ב. לא נכון, נראה דוגמה נגדית: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3\}$, $Y = \{1\}$, $X = \{2,3\}$.
נגדיר פונקציה $f: A \to B$ על ידי $f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 2$.
כעת נוכל לראות ש $f(Y) = \{1\} \subseteq \{1,2\} = f(X)$ אולם $Y \nsubseteq X$.

<u>תרגיל</u>: תהי $f: A \to B$ פונקציה ותהיינה Y, X תתי קבוצות של B.
הוכח ש $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.
<u>הוכחה</u>:
יהי a שרירותי, נוכיח ש $a \in f^{-1}(X \cup Y) \Leftrightarrow a \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

$$a \in f^{-1}(X \cup Y) \Leftrightarrow f(a) \in X \cup Y \Leftrightarrow f(a) \in X \vee f(a) \in Y \Leftrightarrow$$
$$a \in f^{-1}(X) \vee a \in f^{-1}(Y) \Leftrightarrow a \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$$

<u>תרגיל</u>: תהי $f: A \to B$ ותהי $X \subseteq A$. הוכח או הפרך:
א) $X \subseteq f^{-1}\big(f(X)\big)$
ב) $f^{-1}\big(f(X)\big) \subseteq X$
<u>פתרון</u>:
א) נכון. נראה ש $X \subseteq f^{-1}\big(f(X)\big)$.

יהי x שרירותי. נניח ש $x \in X$ ונסמן $f(x) = y$. אזי $y \in f(X)$, כלומר $\{y\} \subseteq f(X)$.

נקבל ש $f^{-1}(\{y\}) = \big\{\, a \in A \;\big|\; f(a) \in \{y\} \big\} \subseteq \{\, a \in A \mid f(a) \in f(X) \,\} = f^{-1}\big(f(X)\big)$.

בנוסף מתקיים $x \in f^{-1}(\{y\})$, ולכן $x \in f^{-1}\big(f(X)\big)$.

ב) לא נכון. בדוגמה הקודמת $f^{-1}\big(f(\{1\})\big) = f^{-1}(\{a\}) = \{1,3\}$ אולם $\{1,3\} \nsubseteq \{1\}$.