פתרון תרגיל 7 מדמח

שאלה 1:

פתרון. א. נפצל את האינטגרל לפי הרמז בנקודה $x = 2$ לשני אינטגרלים לא אמיתיים מהסוג השני, שאותם אנו יודעים לפתור

$$\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} = \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} + \int_4^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} = \lim_{b\to 4-} \int_2^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} + \lim_{b\to 4+} \int_b^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$$

ונמשיך

$$\lim_{b\to 4-} -3(4-x)^{\frac{1}{3}}\Big|_2^b + \lim_{b\to 4+} -3(4-x)^{\frac{1}{3}}\Big|_b^6$$
$$= \lim_{b\to 4-}\left(-3(4-b)^{\frac{1}{3}} + 3\sqrt[3]{2}\right) + \lim_{b\to 4+}\left(3\sqrt[3]{2} + 3(4-b)^{\frac{1}{3}}\right) = 6\sqrt[3]{2}$$

שאלה 2: סעיף א:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx.$$

נשים לב ש $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{-2x} = -\frac{1}{2}$. האינטגרל $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$ הוא אמיתי, ולכן קיים וסופי.

נבדוק התכנסות האינטגרל $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2}dx$. מספיק לבדוק האם האינטגרל $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\ln x}{1-x^2}dx$ מתכנס.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} -\ln x dx = \left[-x\ln x + x\right]_0^{\frac{1}{2}} = \lim_{a\to 0}\left[-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + b\ln b - b\right] = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

ז"א האינטגרל $\int_0^{\frac{1}{2}} -\ln x dx$ מתכנס.

$\frac{-\ln x}{1-x^2} > 0$ לכל $0 \le x \le \frac{1}{2}$ וניתן להשתמש במבחן ההשוואה הראשון.

לכל $0 \le x \le \frac{1}{2}$ מתקיים $\frac{-\ln x}{1-x^2} \le \frac{-4\ln x}{3}$. מכיוון ש $\int_0^{\frac{1}{2}} -\ln x dx$ מתכנס גם $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-4\ln x}{3}dx$.

ממבחן ההשוואה הראשון נקבל ש $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\ln x}{1-x^2}dx$ מתכנס וסה"כ $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$ מתכנס.

סעיף ב:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x\sqrt{|\ln x|}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x\sqrt{-\ln x}}\mathrm{d}x$$

נציב $t=-\ln x$ ולכן $\mathrm{d}t=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ כלומר

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x\sqrt{-\ln x}}\mathrm{d}x=-\int_{-\ln\frac{1}{2}}^{0}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\int_{0}^{-\ln\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

וזה אינטגרל מתכנס ולכן גם האינטגרל שלנו מתכנס.

שאלה 3:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{x}{\cos x}\sin(tgx)dx=\left\{\begin{matrix}\text{הצבה}\\ tgx=t\\ x=arctgt\\ dx=\frac{1}{1+t^2}dt\\ \frac{1}{\cos^2 x}=t^2+1\end{matrix}\right\}=\int_0^{\infty}\sin t\cdot\frac{arctgt}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

נסמן $f(t)=\sin t$; $g(t)=\frac{arctgt}{\sqrt{t^2+1}}$

$g(t)$ מונוטונית יורדת ל 0 – כי $\lim\limits_{t\to\infty}arctgt=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}=0$.

$g(t)$ מונוטונית יורדת החל מ t_0 מסוים כי

$$g'(t)=\frac{\frac{1}{1+t^2}\sqrt{1+t^2}-arctgt\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{t^2+1}=\frac{1-t\,arctgt}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}<0$$

החל מ t_0 מסוים.

תנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ולכן אינטגרל מתכנס. התכנסות היא בתנאי כי $\int_0^{\infty}|\sin t|\frac{arctgt}{\sqrt{t^2+1}}dt\sim\int_0^{\infty}\frac{|\sin t|}{t}dt$,

$\int_0^{\infty}\frac{|\sin t|}{t}dt$ מתבדר ולכן אינטגרל $\int_0^{\infty}|\sin t|\frac{arctgt}{\sqrt{t^2+1}}dt$ גם מתבדר לפי מבחן ההשוואה.

שאלה 4:

פתרון. א. נבצע את מבחן ההשוואה עם $\frac{1}{x^{\alpha-2}}$ ונקבל

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^{\alpha-2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2(x)}{x^2}=1$$

ואנו יודעים כי האינטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-2}}$ מתכנס אם ורק אם $\alpha<3$, ולכן גם האינטגרל בשאלה מתכנס בדיוק בתחום זה.

ב. עבור $\alpha>0$ נבצע את מבחן ההשוואה עם $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ונקבל

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\ln(x)|^\alpha}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,|\ln(x)|^\alpha=0$$

ידוע לנו כי $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ מתכנס, ולכן גם האינטגרל בשאלה מתכנס. עבור $\alpha=0$, ברור כי האינטגרל מתכנס. עבור $\alpha<0$, נקבל אינטגרל לא אמיתי מסוג שני עם נקודה בעייתית $x=1$. נבצע השוואה עם $\frac{|\ln(x)|^\alpha}{x}$ ונקבל

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|\ln(x)|^\alpha}{\frac{|\ln(x)|^\alpha}{x}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x\,|\ln(x)|^\alpha}{|\ln(x)|^\alpha}=\lim_{x\to 1^-}x=1$$

כדי לבדוק את התכנסות האינטגרל $\int_0^1\frac{|\ln(x)|^\alpha}{x}dx$ נשים לב כי במקרה שלנו $|\ln(x)|=-\ln(x)$ וניתן להציב

$$\int_0^1\frac{(-\ln(x))^\alpha}{x}dx=\left[t=-\ln x, dt=\frac{-1}{x}dx\right]=-\int_\infty^0 t^\alpha dt=\int_0^\infty t^\alpha dt$$

ולקבל שהאינטגרל האחרון מתכנס כאשר $\alpha>-1$, וזו תהיה התשובה גם עבור האינטגרל בשאלה.