

תרגיל 5 - פונקציות מורכבות

1. חשבו את האינטגרלים הבאים :

א. $\int_{\gamma} \frac{(z+1)^7}{z-1} dz$ כאשר γ נתונה לפי $|z-1|=1$.

ב. $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$

ג. $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$

ד. $\int_{\gamma} \frac{1}{(z-1)(z+1)} dz$ כאשר γ נתונה לפי $t \in [-1, 1]$, $\gamma(t) = it$.

ה. $\int_{\gamma} \frac{1+(-iz-2)^9}{16-(-iz-2)^2} dz$ כאשר γ הוא חצי המעגל עם מרכז $2i$ וברדיוס 2 המחבר את הנקודות 0 ו- $4i$ ומכוון נגד כיוון השעון.

2. השתמשו בנוסחת אינטגרל קושי עבור $\int_{|z|=1} \frac{e^{kz}}{z} dz$ (קבוע ממשי k) בכדי להוכיח ש-

$$\int_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} \cos(k \sin \theta) d\theta = 2\pi \quad \text{ו-} \quad \int_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} \sin(k \sin \theta) d\theta = 0$$

3. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

לכל פונקציה אנליטית $f(z)$ ולכל מסילה חלקה γ מתקיים

$$\operatorname{Re} \left(\int_{\gamma} f(z) dz \right) = \int_{\gamma} \operatorname{Re} f(z) dz$$