מתמטיקה בדידה (88195) – פתרון בחינת סיום (מועד ב')

פרופ' רון עדין

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.
5 השאלות הן שוות-משקל. יש לענות על כולן, כל שאלה בעמוד נפרד.
ניתן לסמן עמודים כ"טיוטה".
יש להסביר ולנמק בבירור את כל הפתרונות.

בהצלחה !

1. הוכיחו: $\{\wedge,\vee,\neg\}$ היא קבוצת קַשָּׁרים שלמה.

<u>רעיון ההוכחה:</u> לכל טבלת אמת אפשר לבנות CNF (וכן DNF), שהיא נוסחה המשתמשת בקשרים הנ"ל בלבד.

2. הוכיחו או הפריכו:
א. אם $A\subseteq C$ אז $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$.

<u>הוכחה:</u> $A\cap C=A$ ולכן $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)=A\cup(B\cap C)$.

ב. אם $A\subseteq C$ אז $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$.

<u>הפרכה:</u> אם $A=\varnothing$ אבל $C\neq\varnothing$ אז $(A\cap B)\cup C=C\neq\varnothing=A\cap(B\cup C)$.

3. תהי $\mathbb{N}$ קבוצת המספרים הטבעיים. נגדיר על $P(\mathbb{N})$ יחס $\sim$ ע"י:

$$A\sim B \quad\Leftrightarrow\quad |A\triangle B|<\aleph_0 \qquad (\forall A,B\in P(\mathbb{N}))$$

כאשר $\triangle$ מסמן הפרש סימטרי.
א. הוכיחו: $\sim$ הוא יחס שקילות על $P(\mathbb{N})$.

<u>רפלקסיבי:</u> $A\triangle A=\varnothing$ היא קבוצה ריקה, ולכן סופית.
<u>סימטרי:</u> $A\triangle B=B\triangle A$.
<u>טרנזיטיבי:</u> הפרש סימטרי הוא פעולה אסוציאטיבית, ומקיים $B\triangle B=\varnothing$. לכן, אם $A\triangle B$ וגם $B\triangle C$ קבוצות סופיות, אז גם ההפרש הסימטרי שלהן $(A\triangle B)\triangle(B\triangle C)=(A\triangle(B\triangle B))\triangle C=A\triangle C$ הוא קבוצה סופית.

ב. הוכיחו שלכל מחלקות השקילות $[A]_\sim$ יש אותה עוצמה. מהי?

מחלקת השקילות של הקבוצה הריקה היא $[\varnothing]_\sim=\{B\in P(\mathbb{N}):|B|<\aleph_0\}$, אוסף כל תת-הקבוצות הסופיות של $\mathbb{N}$. לכל קבוצה $A\in P(\mathbb{N})$, הפונקציה $f:[\varnothing]_\sim\to[A]_\sim$ המוגדרת ע"י $f(B):=A\triangle B$ היא חח"ע ועל, כיוון שניתן

לשחזר את B מתוך $A\triangle B$: $A\triangle(A\triangle B)=(A\triangle A)\triangle B=B$. לכן, לכל $A\in P(\mathbb{N})$, $|[A]_\sim|=|[\varnothing]_\sim|$.

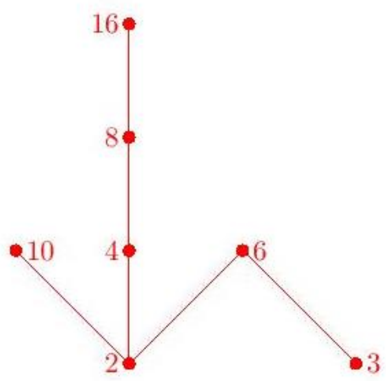
לגבי חישוב העוצמה: כל תת-קבוצה סופית של $\mathbb{N}$ מוכלת בקבוצה $\{1,\dots,n\}$ עבור n טבעי מתאים, ולכן $[\varnothing]_\sim=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{B\in P(\mathbb{N}):B\subseteq\{1,\dots,n\}\}$. זהו איחוד של מספר בן-מניה של קבוצות סופיות, ולכן $|[\varnothing]_\sim|\le\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$. מצד שני $\{n\}\in[\varnothing]_\sim$ לכל n טבעי, ולכן $|[\varnothing]_\sim|\ge\aleph_0$. לסיכום: $|[A]_\sim|=\aleph_0$ לכל $A\in P(\mathbb{N})$.

ג. מצאו את עוצמת קבוצת המנה $P(\mathbb{N})/\sim$.

כמובן, $\aleph=2^{\aleph_0}=2^{|\mathbb{N}|}=|P(\mathbb{N})|$. נסמן: $a:=|P(\mathbb{N})/\sim|$. מכיוון שהקבוצה $P(\mathbb{N})$ היא איחוד זר של מחלקות השקילות, שעוצמת כל אחת מהן היא $\aleph_0$ (לפי סעיף ב), נקבל $\aleph=|P(\mathbb{N})|=\aleph_0\cdot a$. אם $a\le\aleph_0$ אז $\aleph=\aleph_0\cdot a\le\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$ וסתירה. לפיכך $a>\aleph_0$, ולכן $\aleph=\aleph_0\cdot a=a$. זו עוצמת קבוצת המנה.

4. תהי $A=\{2,3,4,6,8,10,16\}$, עם יחס הסדר החלקי "$|$" (... מחלק את ...). למשל: $2|4$ אבל $3\nmid 2$.

א. ציירו דיאגרמת הסה עבור A.



ב. רשמו את כל האיברים המינימליים והאיברים המקסימליים ב-A.

איברים מינימליים: 2,3
איברים מקסימליים: 6,10,16

ג. רשמו את כל השרשראות המקסימליות ב-A.

$3<6$, $2<6$, $2<4<8<16$, $2<10$

ד. רשמו את כל האיברים $a\in A$ כך שב-$A\setminus\{a\}$ יש איבר קטן ביותר, ואת כל האיברים $b\in A$ כך שב-$A\setminus\{b\}$ יש איבר גדול ביותר.

$a=3$ בלבד.
אין b כנדרש.

5. מצאו כמה מספרים עשרוניים, בעלי 28 ספרות לכל היותר, הם בעלי סכום ספרות:
א. 8 לכל היותר.

מבוקש מספר הפתרונות של אי-השוויון $x_1+\ldots+x_{28}\le 8$ כאשר $0\le x_i\le 9$ לכל i. אם כל המשתנים אי-שליליים אז התנאי $x_i\le 9$ מתקיים באופן אוטומטי, ולכן מספיק לדרוש $x_i\ge 0$ לכל i. נגדיר $x_{29}:=8-(x_1+\ldots+x_{28})$, ואז צריך למצוא את מספר הפתרונות של המשוואה $x_1+\ldots+x_{29}=8$ כאשר $x_i\ge 0$ לכל i.

<u>תשובה</u>: $\binom{36}{8}$.

ב. 28 בדיוק.

מבוקש מספר הפתרונות של המשוואה $x_1+\ldots+x_{28}=28$ כאשר $0\le x_i\le 9$ לכל i. אם נדרוש רק $x_i\ge 0$ לכל i אז מספר הפתרונות הוא $\binom{55}{28}$.
מתוכם יש להוציא את הפתרונות שעבורם $x_i\ge 10$ עבור i אחד לפחות.
לכל i נסמן ב-A_i את קבוצת הפתרונות שעבורם המשתנה $x_i\ge 10$. ע"י החלפת x_i כזה ב-y_i+10 (כאשר $y_i\ge 0$) ניתן לראות כי $|A_i|=\binom{45}{18}$ לכל i, $|A_i\cap A_j|=\binom{35}{8}$ לכל $i\ne j$, $|A_i\cap A_j\cap A_k|=0$ לכל i, j, k שונים. לפי נוסחת ההכללה וההוצאה מן הכלל נקבל:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{28}A_i\right|=\sum_i|A_i|-\sum_{i\ne j}|A_i\cap A_j|+\ldots=28\cdot\binom{45}{18}-\binom{28}{2}\cdot\binom{35}{8}.$$

<u>תשובה</u>: $\binom{55}{28}-28\cdot\binom{45}{18}+\binom{28}{2}\cdot\binom{35}{8}$