פתרון תרגיל בית 5 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1 (חימום)**.** תהי קבוצה $A = \{a, b\}$. הוכיחו שיש שתי פעולות שונות של $\mathbb{Z}_2$ על A.

פתרון. ישנן בדיוק שתי פעולות. האחת, הפעולה הטריוויאלית המוגדרת לפי $g * a = a$, $g * b = b$ לכל $g \in \mathbb{Z}_2$.

הפעולה השנייה היא "הפעולה שהופכת", המוגדרת לפי

$$0 * a = a, \quad 0 * b = b, \quad 1 * a = b, \quad 1 * b = a$$

האם אתם רואים את הקשר לפעולת הכפל משמאל של $\mathbb{Z}_2$ על עצמה?

שאלה 2. הוכיחו שלכל $n, s > 1$ טבעיים מתקיים כי $n | \varphi(s^n - 1)$.
רמז: המספר $\varphi(s^n - 1)$ הוא סדר של חבורה מוכרת.

פתרון. לפי הרמז נשים לב כי $\varphi(s^n - 1) = |U_{s^n-1}|$. אם נמצא איבר $x \in U_{s^n-1}$ מסדר n, אז נסיים לפי מסקנה ממשפט לגראנז' שבה מראים כי סדר של איבר מחלק את סדר החבורה.

נבחר את $x = s$. קל לבדוק כי $s^{n-1} \cdot s - 1 \cdot (s^n - 1) = 1$ ולכן $(s, s^n - 1) = 1$. כלומר $s \in U_{s^n-1}$. נותר להראות שהסדר של s בחבורה הוא n. תחילה להיתכנות, מחשבים

$$s^n \equiv 1 \pmod{s^n - 1}$$

ולכן $o(s) | n$. למינימליות של הסדר, נשים לב כי $s^i < s^n - 1$ לכל $i < n$ כמספרים טבעיים. לכן גם בהכרח s^i אינו שקול ל-1 מודולו $s^n - 1$. בסך הכל $o(s) = n | \varphi(s^n - 1)$.

שאלה 3 (קצת חזרה)**.** תהי G חבורה מסדר p^n עבור n טבעי ו-p ראשוני, הפועלת על קבוצה X. נניח כי גודל הקבוצה $|X|$ זר ל-p. הוכיחו שקיימת ב-X נקודת שבת.

פתרון. גודל כל מסלול מחלק את $|G| = p^n$. לכן הגדלים האפשריים של המסלולים הם p^i עבור $0 \leq i \leq n$. מצד שני סכומם הוא $|X|$, שזר ל-p. אם לא קיימת נקודת שבת (כלומר אין מסלול מגודל 1), אז סכום גדלי המסלולים הוא סכום של מספרים המתחלקים ב-p, ולכן מתחלק ב-p. זו סתירה, ולכן קיימות ב-X נקודות שבת תחת הפעולה.

שאלה 4. קבעו האם הפעולות הבאות של חבורה G על $\mathbb{R}^2$ היא פעולה של חבורה על קבוצה. באם כן, תארו את המסלול של $(0, 1)$ ושל $(1, 1)$.

א. $G = \mathbb{R}$ עם פעולה המוגדרת לפי $t * (x, y) = (x + t, y + 2t)$.

ב. $G = \mathbb{Z}$ עם פעולה המוגדרת לפי $t * (x, y) = (tx, t^2 x)$.

ג. $G = SO_2(\mathbb{R})$, החבורה של כל מטריצות הסיבוב

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

עם פעולה המוגדרת לפי $A * (x, y) = A\binom{x}{y}$ לכל $A \in G$. רמז: נורמה.

פתרון.

א. מתקיים:

$$\begin{aligned}(t+s)*(x,y) &= (x+t+s,y+2(t+s)) = (x+t+s,y+2t+2s)\\ &= s*(x+t,y+2t) = t*(s*(x,y))\end{aligned}$$

לכן

$$0*(x,y) = (x+0,y+0) = (x,y)$$

ולכן זו פעולה של חבורה על קבוצה. נתאר את המסלולים:
$\operatorname{orb}(0,1) = \{t*(0,1) \mid t\in\mathbb{R}\} = \{(t,1+2t) \mid t\in\mathbb{R}\}$ (זהו הגרף של הישר $y = 1+2x$).
$\operatorname{orb}(1,1) = \{t*(1,1) \mid t\in\mathbb{R}\} = \{(1+t,1+2t) \mid t\in\mathbb{R}\}$ (זהו הגרף של הישר $y = 2x-1$).

ב. זו לא פעולה של חבורה על קבוצה. כי למשל $0*(x,y) = (0,0) \neq (x,y)$.

ג. זו פעולה של חבורה על קבוצה (כידוע מלינארית). נתאר את המסלולים:
$\operatorname{orb}(0,1) = \left\{A\binom{0}{1} \mid A\in SO_2(\mathbb{R})\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{x^2+y^2}=1\right\}$
$\operatorname{orb}(1,1) = \left\{A\binom{1}{1} \mid A\in SO_2(\mathbb{R})\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}\right\}$.

שאלה 5. תהי G חבורה סופית מסדר אי זוגי. הוכיחו שלכל איבר $e\neq x\in G$ מתקיים $x^{-1}\notin\operatorname{conj}(x)$ (כלומר ההופכי של x לא שייך למחלקת הצמידות של x).

פתרון. נניח בשלילה כי $x^{-1}\in\operatorname{conj}(x)$. כלומר x צמוד להופכי שלו, ולכן קיים $g\in G$ כך ש-$gxg^{-1}=x^{-1}$. נצמיד את המשוואה האחרונה שוב ב-g ונקבל

$$ggxg^{-1}g^{-1} = gx^{-1}g^{-1} = \left(gxg^{-1}\right)^{-1} = x$$

ולכן $g^2x = xg^2$. החבורה G היא סופית מסדר אי זוגי, ולכן לפי מסקנה ממשפט לגראנז' הסדר של g הוא אי זוגי, נניח $o(g)=2m+1$. לכן $e = g^{2m+1} = g\left(g^2\right)^m$, וקיבלנו כי $g^{-1} = \left(g^2\right)^m$. נציב זאת במשוואה $gxg^{-1}=x^{-1}$ ונקבל

$$x = g\left(g^2\right)^m x = gx\left(g^2\right)^m = x^{-1}$$

ולכן $x=x^{-1}$, שזו סתירה כי x אינו איבר היחידה ואין בחבורה איברים מסדר 2.

שאלה 6. תהי S_n חבורת התמורות על הקבוצה $\{1,\ldots,n\}$. הוכיחו או הפריכו האם הפונקציות הבאות הן פעולה של S_n על הקבוצה $\mathbb{R}^n$:

א. תהי תמורה $\sigma\in S_n$, ויהי איבר $v=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. הפעולה של σ על v מוגדרת כתמורה על האינדקסים, כלומר $\sigma * v = \left(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right)$.

ב. תהי תמורה $\sigma\in S_n$, ויהי איבר $v=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. הפעולה של σ על v מוגדרת כתמורה של σ^{-1} על האינדקסים, כלומר $\sigma * v = \left(x_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,x_{\sigma^{-1}(n)}\right)$.

פתרון.

א. ננסה לראות האם זו באמת פעולה. קל לוודא כי $\operatorname{id}*v = v$. כעת, ניקח $\sigma,\tau\in S_n$, ונרצה לבדוק האם $(\sigma\tau)*v = \sigma*(\tau*v)$: ראשית,

$$\tau * v = \left(v_{\tau(1)},\ldots,v_{\tau(n)}\right).$$

נסמן את הווקטור שהתקבל $(w_1, \dots, w_n)$. כשנפעיל את σ על $(w_1, \dots, w_n)$, נקבל את הווקטור

$$\sigma * (\tau * v) = (w_{\sigma(1)}, \dots, w_{\sigma(n)}).$$

כלומר, במקום ה-i מופיע $w_{\sigma(i)} = w_{\tau\sigma(i)}$. אבל זה לא בהכרח $w_{\sigma\tau(i)}$! למשל, אפשר לבחור תמורות $\sigma = (1,2)$ ו-$\tau = (2,3)$, שעבורן $\sigma\tau = (1,2,3)$, ואז

$$(\sigma\tau)(v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n) = (v_2, v_3, v_1, v_4, \dots, v_n)$$

ואילו

$$\sigma * (\tau * v) = \sigma * (v_1, v_3, v_2, v_4, \dots, v_n) = (v_3, v_1, v_2, v_4, \dots, v_n)$$

וקיבלנו וקטורים שונים. לכן זו <u>לא</u> פעולה שמאלית.

ב. זאת אכן פעולה. שוב קל לוודא $\mathrm{id} * v = v$ לכל $v \in \mathbb{R}^n$; בנוסף, אם $\sigma, \tau \in S_n$, נסמן שוב

$$\tau * v = (v_{\tau^{-1}(1)}, \dots, v_{\tau^{-1}(n)}) = (w_1, \dots, w_n)$$

ונקבל

$$\sigma * (\tau * v) = \sigma * (w_1, \dots, w_n) = (w_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, w_{\sigma^{-1}(n)}).$$

כעת $w_{\sigma^{-1}(i)} = v_{\tau^{-1}\sigma^{-1}(i)}$, ולכן

$$\begin{aligned}\sigma * (\tau * v) &= (v_{\tau^{-1}\sigma^{-1}(1)}, \dots, v_{\tau^{-1}\sigma^{-1}(n)}) = \\ &= (v_{(\sigma\tau)^{-1}(1)}, \dots, v_{(\sigma\tau)^{-1}(n)}) = (\sigma\tau) * v\end{aligned}$$

כנדרש. בעצם, זה נובע מכך שהפעולה של סעיף א' היא פעולה ימנית ולא שמאלית, וכשהחלפנו את σ ב-σ^{-1} הפכנו את הכיוון שלה לפעולה שמאלית.

שאלה 7 (קשה)**.** נגדיר דגל מלא של $V = \mathbb{R}^n$ להיות שרשרת של מרחבים וקטוריים

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$$

כאשר $\dim V_i = i$. נסמן ב-$\mathcal{B}$ את אוסף הדגלים המלאים של V.

א. הוכיחו כי החבורה $GL_n(\mathbb{R})$ פועלת על $\mathcal{B}$ לפי

$$A * (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n) = A \cdot V_0 \subset A \cdot V_1 \subset \cdots \subset A \cdot V_n$$

כאשר $A \cdot V_i = \{Av \mid v \in V_i\}$.

ב. הראו שבפעולה לעיל יש מסלול אחד.

ג. מצאו את המייצב של הדגל הסטנדרטי $\{0\} \subset \langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ כאשר $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ הוא הבסיס הסטנדרטי. רמז: אינדוקציה על i.

פתרון.

א. יהי $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$ דגל ב-$\mathcal{B}$. לכל מרחב וקטורי V_i בדגל ולכל $v \in V_i$, איבר היחידה $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ מקיים כי $I_n v = v$. לכן $I_n \cdot V_i = V_i$. אנחנו יודעים שכפל מטריצות (כאשר הגדלים מתאימים) הוא קיבוצי ולכן לכל $A_1, A_2 \in GL_n(\mathbb{R})$ מתקיים $A_1(A_2 v) = (A_1 A_2)v$. לכן גם $A_1(A_2 \cdot V_i) = (A_1 A_2) \cdot V_i$. לכן

$$\begin{aligned}A_1 * (A_2 * (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n)) &= A_1 * (A_2 \cdot V_0 \subset A_2 \cdot V_1 \subset \cdots \subset A_2 \cdot V_n) \\ &= A_1(A_2 \cdot V_0) \subset A_1(A_2 \cdot V_1) \subset \cdots \subset A_1(A_2 \cdot V_n) \\ &= (A_1 A_2) \cdot V_0 \subset (A_1 A_2) \cdot V_1 \subset \cdots \subset (A_1 A_2) \cdot V_n \\ &= (A_1 A_2) * (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n)\end{aligned}$$

וקיבלנו שאכן מדובר בפעולת חבורה על קבוצה.

ב. אנו למעשה מראים כי הפעולה טרנזיטיבית. נסמן ב-F_e את הדגל הסטנדרטי

$$\{0\} \subset \langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$$

מספיק להראות שלכל דגל $F \in \mathcal{B}$ יש $A \in GL_n(\mathbb{R})$ השולחת את F_e אל F (זה נכון לכל פעולה של חבורה, שאם ישנו איבר שהמסלול שלו הוא כל הקבוצה, אז המסלול של כל איבר הוא כל הקבוצה, הרי מסלול הוא מחלקת שקילות). יהי דגל

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$$

ב-$\mathcal{B}$ כך שלמרחב V_1 יש בסיס $\{b_1\}$ של וקטור עמודה, שאותו נשלים לבסיס $\{b_1, b_2\}$ של V_2, וכן הלאה באינדוקציה עד שנקבל בסיס $\{b_1, \ldots, b_n\}$ של V. הרי לפי הגדרה $\dim V_i = i$ ואנחנו יודעים שאפשר להשלים קבוצה בלתי תלויה לינארית של $i-1$ וקטורים ב-V_i לבסיס בן i איברים. המטריצה A המבוקשת היא מטריצת מעבר בין הבסיס הסטנדרטי לבסיס $\{b_1, \ldots, b_n\}$. באופן מפורש

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

ונקבל $A \cdot \langle e_1, \ldots, e_i \rangle = \langle b_1, \ldots, b_i \rangle = V_i$ לכל i.

ג. תהי $A \in \mathrm{stab}(F_e)$. לכן $A \cdot \langle e_1, \ldots, e_i \rangle = \langle e_1, \ldots, e_i \rangle$ לכל i. הדרישה $A \cdot \langle e_1 \rangle = \langle e_1 \rangle$ משמעה שהעמודה הראשונה של A היא $(r_1, 0, \ldots, 0)$ עבור $r_1 \in \mathbb{R}^*$ (למה $r_1 \neq 0$? כי A הפיכה). כעת מהדרישה $A \cdot \langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$ נקבל שהעמודה השנייה של A היא מן הצורה $(r_2', r_2, 0, \ldots, 0)$ עבור $r_2 \in \mathbb{R}^*$ ו-$r_2' \in \mathbb{R}$. מכאן ברור שצריך להמשיך באינדוקציה על n, המימד של V.
נוכיח באינדוקציה על n ש-$\mathrm{stab}(F_e)$ הוא תת־החבורה של המטריצות המשולשיות העליונות ההפיכות. בסיס האינדוקציה עשינו לעיל. נניח את נכונות הטענה עבור $n-1$. כלומר לכל $1 \leq i \leq n-1$ מתקיים $A \cdot V_i = V_i$. נשאר להוכיח $A \cdot V_n = V_n$. ניתן להניח כי

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} r_1 & * & * & * & a_1 \\ 0 & r_2 & * & * & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & r_{i-1} & a_{n-1} \\ \hline b_1 & \cdots & \cdots & b_{n-1} & r_n \end{array}\right)$$

כאשר $r_i \in \mathbb{R}^*$, $* \in \mathbb{R}$ לפי הנחת האינדוקציה, ואנו נדרשים למצוא את איברי השורה והעמודה האחרונות. אם $b_i \neq 0$ נקבל סתירה לכך ש-$A \cdot \langle e_1, \ldots, e_i \rangle = \langle e_1, \ldots, e_i \rangle$, כי באגף שמאל נוכל למצוא וקטור שבצירוף לינארי בבסיס הסטנדרטי יש ל-e_n מקדם b_i, ואז הוא לא שייך לאגף ימין. לכן $b_i = 0$ לכל i, וכדי להבטיח ש-A הפיכה נדרוש $r_n \in \mathbb{R}^*$. עבור כל $1 \leq i \leq n-1$ אין שום מגבלה על a_i, שכן אם $v \in V_n$, אז $Av \in \mathbb{R}^n = V_n$, ואם $v \in V_j$ עבור $j < n$, אז $Av \in V_j$ כי בפיתוח המכפלה Av נקבל כי $n-j$ האיברים התחתונים הם 0 (כלומר $a_{n-j}, \ldots, a_n$ לא משפיעים כאן כלל). ביתר פירוט: אם $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_j e_j$, אז אפשר לבדוק לכל מחובר $A\alpha_i e_i \in V_j$ בנפרד. מכאן ש-A מטריצה משולשית עליונה והפיכה, כדרוש.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה שלחו לנו את הפתרון שלהן.

שאלה 8. נתבונן בחבורה $G = GL_2(\mathbb{Z})$, שהיא אוסף כל המטריצות בגודל 2×2 מעל השלמים שהדטרמיננטה שלהן היא 1 או -1. החבורה G פועלת על הקבוצה של "וקטורי עמודה" ב-$\mathbb{Z}^2$ לפי כפל

$$A * \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

אפיינו את המסלולים של פעולה זו והוכיחו שניתן לבחור נציג מן הצורה $\binom{d}{0}$ עבור $d \geq 0$.
מצאו את המייצב של $\binom{d}{0}$ תחת הפעולה.

בהצלחה!