פונקציות ב - $\mathbb{R}^n$

הגדרה

תהי $f(x,y)$ פונקציה ממשית המוגדרת בסביבה של הנקודה (x_0,y_0).

הגבולות החוזרים של f בנקודה (x_0,y_0) הם הגבולות:

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$
$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

דוגמה

תהי:

$$f(x,y) \quad := \quad \frac{xy}{x^2+y^2}$$

הגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

אינו קיים.

אולם, הגבולות החוזרים:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) \quad = \quad 0$$
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) \quad = \quad 0$$

קיימים ושווים.

■

דוגמה

תהי:

$$f(x,y) \quad := \quad \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

הגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

אינו קיים.

אולם, הגבולות החוזרים:

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y) = -1$$
$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y) = 1$$

קיימים ושונים.

$\blacksquare$

דוגמה

תהי:

$$f(x,y) := x\cdot\sin\left(\frac{1}{y}\right)$$

מתקיים:

$$0 \le \left|x\cdot\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| \le |x|$$

לכן, עפ"י משפט הסנדוויץ', הגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

קיים.

אולם, הגבול החוזר:

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)$$

אינו קיים.

$\blacksquare$

דוגמה

תהי:

$$f(x,y) := \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

מתקיים:

$$0 \quad \leq \quad \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \quad \leq \quad |y|$$

לכן, עפ"י משפט הסנדוויץ', הגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad = \quad 0$$

קיים.

גם הגבולות החוזרים:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) \quad = \quad 0$$
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) \quad = \quad 0$$

קיימים ושווים לגבול הנ"ל.

■

משפט

תהי $f(x,y)$ פונקציה ממשית המוגדרת בסביבה של הנקודה (x_0,y_0).

נניח שקיים הגבול:

$$\ell \quad \coloneqq \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

וכי לכל y בסביבת y_0, קיים הגבול:

$$\varphi(y) \quad \coloneqq \quad \lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

אזי, הגבול:

$$\lim_{y\to y_0} \varphi(y)$$

קיים, והוא שווה ל - ℓ.

הוכחה

יהי $0<\varepsilon$.

עפ"י הגדרת הגבול, קיים $0<\delta$, כך שלכל y המקיים:

$$0 \quad < \quad |y-y_0| \quad < \quad \delta$$

ולכל x המקיים:

$$0 \quad < \quad |x - x_0| \quad < \quad \delta$$

מתקיים:

$$|f(x,y) - \ell| \quad < \quad \varepsilon$$

נעבור לגבול $x \to x_0$, ונקבל:

$$|\varphi(y) - \ell| \quad \leq \quad \varepsilon$$

לכן:

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) \quad = \quad \ell$$

■

הגדרה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

תהי $f: E \to \mathbb{R}^m$ ותהי $x_0 \in E$.

f **רציפה** בנקודה x_0 אם לכל $0 < \varepsilon$, קיים $0 < \delta$, כך שלכל $x \in E$, המקיים:

$$||x - x_0|| \quad < \quad \delta$$

מתקיים:

$$||f(x) - f(x_0)|| \quad < \quad \varepsilon$$

הערה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

תהי $f: E \to \mathbb{R}^m$ ותהי $x_0 \in E$.

אם x_0 גבולית, עפ"י ההגדרה:

$$\lim_{x \to x_0, x \in E} f(x) \quad = \quad f(x_0)$$

אם x_0 מבודדת, עפ"י ההגדרה f רציפה ב - x_0.

למה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

תהי $f: E \to \mathbb{R}^m$ ותהי $x_0 \in E$.

f רציפה ב - x_0 אם ורק אם כל הרכיבים שלה רציפים ב - x_0.

למה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

תהיינה $f, g: E \to \mathbb{R}^m$ רציפות בנקודה $x_0 \in E$.

אזי, הפונקציות:

$$f + g$$

$$f \cdot g$$

רציפות ב - x_0.

אם f, g ממשיות ו - $g \neq 0$ ב - E, אזי, הפונקציה:

$$\frac{f}{g}$$

רציפה ב - x_0.

הגדרה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

תהי $f: E \to \mathbb{R}^m$.

f **רציפה** ב E – אם לכל $x_0 \in E$, f רציפה ב - x_0.

דוגמה

תהי:

$$f(x,y,z) \quad := \quad \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2}, & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

לכל $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, f רציפה ב - (x,y,z), כסכום וכמנה של פונקציות רציפות.

נחשב את הגבול:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x)$$

מתקיים:

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} \quad = \quad \frac{x^3}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^3}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^3}{x^2+y^2+z^2}$$

מתקיים:

$$0 \quad \leq \quad \left|\frac{x^3}{x^2+y^2+z^2}\right| \quad \leq \quad |x|$$

לכן, עפ"י משפט הסנדוויץ':

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2+z^2} \quad = \quad 0$$

באופן דומה:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2+z^2} \quad = \quad 0$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{z^3}{x^2+y^2+z^2} \quad = \quad 0$$

לכן:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x) \quad = \quad 0$$

לכן:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x) \quad = \quad f(0,0,0)$$

לכן, f רציפה ב - $(0,0,0)$.

לכן, f רציפה ב - $\mathbb{R}^3$.

■

דוגמה

תהי:

$$f(x,y,z) \quad := \quad \begin{cases} \dfrac{x^2+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0, & (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$$

לכל $(x,y,z)\neq(0,0,0)$, f רציפה ב - (x,y,z), כסכום וכמנה של פונקציות רציפות.

נחשב את הגבול:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x)$$

מתקיים:

$$\frac{x^2+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} \quad = \quad \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}+\frac{y^3}{x^2+y^2+z^2}+\frac{z^3}{x^2+y^2+z^2}$$

נחשב את הגבול:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$$

במסלול $(x,\alpha x,\alpha x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+(\alpha x)^2+(\alpha x)^2} \quad &= \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(1+2\alpha^2)x^2} \\ &= \quad \frac{1}{a+2\alpha^2} \end{aligned}$$

הגבול תלוי במסלול ההתקרבות, לכן אינו קיים.

באופן דומה לדוגמה הקודמת:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2+z^2} \quad &= \quad 0 \\ \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{z^3}{x^2+y^2+z^2} \quad &= \quad 0 \end{aligned}$$

לכן, הגבול:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x)$$

אינו קיים.

לכן, f אינה רציפה ב - $(0,0,0)$.

■

משפט

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

תהי $f: E \to \mathbb{R}^m$.

תהי $N \subseteq \mathbb{R}^m$ כך ש: $\mathcal{I}mg(f) \subseteq N$.

תהי $g: N \to \mathbb{R}^k$.

אם f רציפה ב - $x_0 \in E$ ו $g -$ רציפה ב - $y_0 := f(x_0) \in N$, אזי $h := g \circ f$ רציפה ב - x_0.

הוכחה

יהי $0 < \varepsilon$.

g רציפה ב $- y_0$, לכן קיים $0 < \eta$ כך שלכל $y \in N$ המקיים:

$$||y - y_0|| \quad < \quad \eta$$

מתקיים:

$$||g(y) - g(y_0)|| \quad < \quad \varepsilon$$

f רציפה ב - x_0, לכן קיים $0 < \delta$ כך שלכל $x \in E$ המקיים:

$$||x - x_0|| \quad < \quad \delta$$

מתקיים:

$$||f(x) - f(x_0)|| \quad < \quad \eta$$

לכן, לכל $x \in E$ המקיים:

$$||x - x_0|| \quad < \quad \delta$$

מתקיים:

$$\left\|g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)\right\| \quad < \quad \varepsilon$$

לכן:

$$||h(x) - h(x_0)|| \quad < \quad \varepsilon$$

לכן, h רציפה ב - x_0.

$$\blacksquare$$

הגדרה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

תהי $f: E \to \mathbb{R}^m$.

f **חסומה** אם קיים $0 < M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in E$, מתקיים:

$$||f(x)|| \quad \leq \quad M$$

משפט (ויירשטרס)

תהי $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית.

תהי $f: \mathcal{K} \to \mathbb{R}^m$ רציפה.

אזי, f חסומה על $\mathcal{K}$.

הוכחה

יהי $x \in \mathcal{K}$.

f רציפה ב - x, לכן קיימת סביבה B_x וקיים $0 < M_x \in \mathbb{R}$, כך שלכל $y \in B_k \cap \mathcal{K}$, מתקיים:

$$||f(y)|| \quad \leq \quad M_x$$

$\mathcal{K}$ קומפקטית, לכן לכיסוי הפתוח:

$$\{B_k\}_{k \in \mathcal{K}}$$

קיים תת-כיסוי סופי:

$$\{B_{k_i}\}_{i=1}^{j}$$

נגדיר:

$$M \quad \coloneqq \quad \max_{1 \leq i \leq j} M_{k_i}$$

לכן, לכל $y \in \mathcal{K}$, מתקיים:

$$||f(y)|| \leq M$$

לכן, f חסומה.

$\blacksquare$

משפט (ויירשטרס)

תהי $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית.

תהי $f: \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ רציפה.

אזי, קיימים $x', x'' \in \mathcal{K}$, כך ש:

$$\begin{aligned} f(x') &= \sup_{k \in \mathcal{K}} f(x) \\ f(x'') &= \inf_{k \in \mathcal{K}} f(x) \end{aligned}$$

הוכחה

נסמן:

$$M := \sup_{k \in \mathcal{K}} f(x)$$

נניח בשלילה כי לכל $x \in \mathcal{K}$, מתקיים:

$$f(x) < M$$

נגדיר:

$$\varphi(x) := \frac{1}{M - f(x)}$$

φ רציפה על קבוצה קומפקטית, לכן עפ"י משפט ויירשטרס חסומה על $\mathcal{K}$.

כלומר, קיים $0 < \alpha$, כך שלכל $x \in \mathcal{K}$, מתקיים:

$$\varphi(x) \leq \alpha$$

עפ"י הגדרת φ:

$$\frac{1}{M - f(x)} \quad \leq \quad \alpha$$

לכן:

$$f(x) \quad \leq \quad M - \frac{1}{\alpha}$$

לכן:

$$M \quad \neq \quad \sup_{x \in \mathcal{K}} f(x)$$

סתירה.

לכן, קיים $x' \in \mathcal{K}$, כך ש:

$$f(x') \quad = \quad M$$

כלומר:

$$f(x') \quad = \quad \sup_{x \in \mathcal{K}} f(x)$$

באופן דומה, קיים $x'' \in \mathcal{K}$, כך ש:

$$f(x'') \quad = \quad \inf_{x \in \mathcal{K}} f(x)$$

$$\blacksquare$$

הגדרה

קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ **פתוחה** ביחס ל - $B \subseteq \mathbb{R}^n$, אם קיימת קבוצה פתוחה $G \subseteq \mathbb{R}^n$, כך ש:

$$A \quad = \quad B \cap G$$

משפט

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

תהי $f: E \to \mathbb{R}^m$ פונקציה רציפה.

אזי, לכל קבוצה פתוחה $H \subseteq \mathbb{R}^m$, הקבוצה:

$$f^{-1}(H) \quad := \quad \{x \in E \mid f(x) \in H\}$$

פתוחה ביחס ל - E.

דוגמה

נגדיר:

$$E \quad := \quad (-\infty, \infty)$$

נגדיר:

$$f(x) \quad := \quad \frac{1}{1+x^2}$$

לכן:

$$f(E) \quad = \quad (0,1]$$

לכן, E פתוחה.

אולם, $f(E)$ אינה פתוחה.

■