תרגול 3 בדידה להנדסה

21 בינואר 2015

אינדוקציה:

אינדוקציה היא דרך להסיק מן הפרט אל הכלל.

נשתמש באינדוקציה כשנרצה להראות שטענה מסויימת נכונה לכל שלב בתהליך מסויים (בדרך כלל לכל מספר טבעי; כל מספר הוא "שלב" בהתקדמות).

ההיגיון הוא פשוט - אם הטענה נכונה לשלב הראשון, ואם העובדה שהטענה נכונה לשלב מסויים גוררת שהטענה נכונה גם לשלב הבא אחריו, נקבל שהטענה נכונה לכל שלב;

הרי אם השלב הראשון נכון ואם שלב הוא נכון גם הבא אחריו הוא נכון, נקבל שגם השלב השני הוא נכון. באופן דומה, נקבל שגם השלב השלישי נכון, וממנו נקבל שגם הרביעי נכון וכן הלאה.

הדבר דומה לאבני דומינו. כדי שאבני הדומינו כולן תיפולנה, אנו צריכים שני דברים:

1. שהאבן הראשונה תיפול (שהשלב הראשון יהיה נכון).

2. שכל אבן שנופלת תפיל גם את הבאה אחריה (אם שלב מסויים נכון אז גם הבא אחריו נכון).

אם כך, הוכחה באינדוקציה דורשת שני צעדים עיקריים:

הצעד הראשון הוא לבדוק שהטענה נכונה לשלב הראשון.

הצעד השני הוא להניח שהטענה נכונה עבור שלב מסויים, ולהוכיח שהנחה זו גוררת שהטענה נכונה גם לשלב הבא.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו באינדוקציה:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

לכל n טבעי.

<u>פתרון:</u>

המספר הטבעי הראשון הוא $n = 1$. לכן, הצעד הראשון שלנו הוא לבדוק האם הטענה נכונה עבור $n = 1$.

הצד השמאלי במשוואה הוא $1^2 = 1$ והצד השני הוא $1 = \frac{6}{6} = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6}$ ולכן שני הצדדים שווים, כלומר הטענה נכונה עבור $n = 1$.

כעת, נניח שהטענה נכונה עבור שלב מסויים, כלומר:

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

עבור $n = k$ וכעת נוכיח שהטענה נכונה עבור השלב הבא, $n = k + 1$, כלומר נוכיח שמתקיים:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

נשים לב ש:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2$$

לפי ההנחה שלנו, $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, ולכן נוכל להציב זאת ולקבל:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

נעלה את $(k+1)^2$ לתוך השבר ונקבל:

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

ובסה"כ אכן קיבלנו:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

והוכחנו את הדרוש.

לכן, לפי אינדוקציה, אכן הוכחנו את הטענה לכל n טבעי.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו באינדוקציה:

$$5^n + 12^n \leq 13^n$$

לכל n טבעי גדול מ-2.

<u>פתרון:</u>

השלב הראשון שלנו הוא $n = 2$.

נבדוק האם הטענה נכונה עבור $n = 2$. צד שמאל הוא $5^2 + 12^2 = 169$ וצד ימין הוא $13^2 = 169$ ואכן $169 \leq 169$ והטענה נכונה.

כעת, נניח שהטענה נכונה עבור השלב $n = k$, כלומר:

$$5^k + 12^k \leq 13^k$$

וכעת נוכיח שהטענה נכונה עבור השלב הבא, $n = k+1$. כלומר, נוכיח שמתקיים:

$$5^{k+1} + 12^{k+1} \leq 13^{k+1}$$

אם כן:

$$5^{k+1} + 12^{k+1} = 5 \cdot 5^k + 12 \cdot 12^k \leq 12 \cdot 5^k + 12 \cdot 12^k \leq= 12 \cdot (5^k + 12^k)$$

ולפי הנחת האינדוקציה: $5^k + 12^k \leq 13^k$, ולכן:

$$12 \cdot (5^k + 12^k) \leq 12 \cdot 13^k \leq 13 \cdot 13^k = 13^{k+1}$$

ובסה"כ:

$$5^{k+1} + 12^{k+1} \leq 13^{k+1}$$

והוכחנו את הדרוש.

לכן, לפי אינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי גדול מ-2.

פעולות על קבוצות:

קבוצה היא אוסף של דברים, מסומנת כמו שראינו בסוגריים מסולסלים (מסולסלות? מסולסלים? מה נסגר של המילה הזאת).

בקבוצה אין משמעות לסדר:

$$\{1, 2\} = \{2, 1\}$$

ואין משמעות לריבוי:

$$\{1, 1, 2, 2, 3, 3, 2, 1\} = \{1, 3, 2\}$$

כעת, נגדיר מספר פעולות על קבוצות.

1. איחוד:

$$x \in A \cup B \iff (x \in A) \vee (x \in B)$$

כלומר, איבר נמצא באיחוד של שתי קבוצות אם הוא נמצא באחת מהן (או בזו או בזו או בשתיהן).

2. חיתוך:

$$x \in (A \cap B) \iff (x \in A) \wedge (x \in B)$$

כלומר איבר נמצא בחיתוך של שתי קבוצות אם הוא נמצא גם בזו וגם בזו.

3. הפרש:

$$x \in A \backslash B \iff (x \in A) \vee (x \in B)$$

כלומר, איבר נמצא בהפרש $A \backslash B$ אם הוא נמצא ב$-A$ וגם הוא לא נמצא ב$-B$.

4. הפרש סימטרי:

$$x \in A \triangle B = ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \notin A) \wedge (x \in B))$$

כלומר איבר נמצא בהפרש הסימטרי אם הוא נמצא באחת מן הקבוצות אך לא בשתיהן!