<u>דוגמאות לפתרון שאלות לגבי תלות ופרישה</u>

<u>שאלה 1:</u> האם הווקטור $\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix}10\\20\\5\end{pmatrix}$ **הוא צירוף לינארי של הווקטורים :** $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\10\\4\end{pmatrix}\right\}$ **?**

<u>תשובה</u>: יש לבדוק האם קיימים סקלרים $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ כך ש: $\alpha\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\10\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\20\\5\end{pmatrix}$ אבל זה

בעצם שקול לפתור את המערכת : $\left(\begin{array}{cc|c}1&2&10\\3&10&20\\1&4&5\end{array}\right)$ ולכן נדרג אותה ונקבל :

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&10\\3&10&20\\1&4&5\end{array}\right)\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-3R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&10\\0&4&-10\\0&2&-5\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-2R_3}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&10\\0&0&0\\0&2&-5\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-R_3}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&15\\0&0&0\\0&2&-5\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{2}R_3}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&15\\0&0&0\\0&1&-2.5\end{array}\right)$$

כלומר קיבלנו שאכן קיים צ״ל שייתן לנו את מבוקשנו : $15\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}-2.5\begin{pmatrix}2\\10\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\20\\5\end{pmatrix}$.

<u>שאלה 2</u> : חלק מהכיתות ראו שאלה זו :

נתון מרחב וקטורי כלשהו V מעל F. ונתונים 3 וקטורים בת״ל: $v_1,v_2,v_3\in V$ **.**

האם הוקטורים : $\{v_1+v_2,v_1+v_3,v_2+v_3\}$ **הם תלויים לינארית ?**

תשובה : השאלה היא האם בעצם קיימים סקלרים $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ שכולם שונים מ-0 כך ש:

$\alpha(v_1+v_2)+\beta(v_2+v_3)+\gamma(v_1+v_3)=0$?

נפתח את הסוגריים ונקבץ איברים דומים ונקבל : $(\alpha+\gamma)v_1+(\alpha+\beta)v_2+(\beta+\gamma)v_3=0$.

אבל הרי אנחנו יודעים ש v_1,v_2,v_3 **הם בת״ל (כלומר קיים רק צ״ל טריוויאלי שנותן את וקטור ה-0)** ולכן זה אומר ש : $\begin{cases}\alpha+\gamma=0\\\alpha+\beta=0\\\beta+\gamma=0\end{cases}$ ומכן אם תפתרו את המערכת תקבלו ש :

$\alpha=\beta=\gamma=0$ מה שאומר שגם $\{v_1+v_2,v_1+v_3,v_2+v_3\}$ הם בת״ל.

<u>שאלה 3 :</u> חלק מהכיתות ראו שאלה זו :

יהי V מ"ו מעל F ויהיו B,A קבוצות $A,B\subseteq V$ הוכח או הפרך: $sp(A\cap B)=sp(A)\cap sp(B)$

תחילה עלי להקדים ולומר שהסימן $\cap$ ששמו בשפה מתמטית **<u>"חיתוך"</u>** - משמעו הוא האיברים המשותפים כלומר כשעושים חיתוך בין שתי קבוצות לוקחים בעצם את מה שמשותף לשתיהן.
לדוגמא : $\{1,2,3\}\cap\{2,3,4\}=\{2,3\}$
הסימן $\cup$ שמו הוא "איחוד" משמעו הוא לקחת את כל האיברים שנמצאים בשתי הקבוצות ולאחד אותם לקבוצה אחת, לדוגמה : $\{1,2,3\}\cup\{2,3,4\}=\{1,2,3,4\}$.

כעת ניתן דוגמה נגדית . כשאנו רוצים להפריך טענה מספיק לתת דוגמה נגדית אחת וזה מספיק.

ניקח את הדוגמה הבאה : $A=\{(0,1)\},B=\{(0,2)\},V=\mathbb{R}^2$.
נחשב :
ציר ה-X= $sp(A)=sp\{(0,1)\}=\{t(0,1)\mid t\in\mathbb{R}\}$
ציר ה-X= $sp(B)=sp\{(0,2)\}=\{t(0,2)\mid t\in\mathbb{R}\}$.

בסה"כ נקבל $sp(A)\cap sp(B)$ =ציר הX.

מצד שני, כיון ש ל A ול B אין אף איבר משותף, נקבל: $sp(A\cap B)=sp(\phi)=\vec{0}$. ולכן קיבלנו סתירה.

<u>שאלה 4</u>

<u>יהי V מרחב וקטורי מעל F. הוכח או הפרך : $sp\{v_1,v_2\}=sp\{v_1+v_2,v_1-v_2\}$.</u>

הוכחה. שימו לב : על מנת להוכיח שיוויון קבוצות אתם צריכים להראות הכלה הפוכה. כלומר לקחת איבר מקבוצה A ולהראות ששייך לקבוצה B וכן להיפך.
גם כאן נעשה זאת :

<u>כיוון ראשון</u> : יש להוכיח $sp\{v_1,v_2\}\supseteq sp\{v_1+v_2,v_1-v_2\}$.
נתון $v\in sp\{v_1+v_2,v_1-v_2\}$.
כלומר, קיימים סקלרים $\alpha,\beta\in F$ כך ש $v=\alpha(v_1+v_2)+\beta(v_1-v_2)$.

נפתח את הסוגריים ונקבל : $v=(\alpha+\beta)v_1+(\alpha-\beta)v_2$. כלומר בעצם קיבלנו שניתן להביע את הווקטור כצ"ל של הוקטורים v_1,v_2 , ולכן בסה"כ קיבלנו : $sp\{v_1,v_2\}\supseteq sp\{v_1+v_2,v_1-v_2\}$.

<u>כיוון שני :</u> $sp\{v_1,v_2\}\subseteq sp\{v_1+v_2,v_1-v_2\}$.
נתון $v\in sp\{v_1,v_2\}$. , קיימים סקלרים $\alpha,\beta\in F$ כך ש $v=\alpha v_1+\beta v_2$. אנחנו מחפשים סקלרים : $\gamma,\delta\in F$ כך ש : $\boxed{v=\alpha v_1+\beta v_2=\gamma(v_1+v_2)+\delta(v_1-v_2)}$.(*)

כלומר אם נפתח :
$$\alpha v_1+\beta v_2=\gamma v_1+\gamma v_2+\delta v_1-\delta v_2$$
$$\alpha v_1+\beta v_2=\underbrace{(\gamma+\delta)}_{\alpha}v_1+\underbrace{(\gamma-\delta)}_{\beta}v_2$$
ולכן אנחנו בעצם מחפשים : $\boxed{\begin{cases}\gamma+\delta=\alpha\\ \gamma-\delta=\beta\end{cases}}$.(**)

נעשה מספר פעולות : אם נחבר את המשוואות (**) , נקבל : $2\gamma=\alpha+\beta$, ולכן $\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

מצד שני אם נחסר את המשוואות (**), נקבל : $2\delta=\alpha-\beta$, כלומר $\delta=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

נחזור למשוואה (*) בסה"כ קיבלנו,

$$\boxed{v=\alpha v_1+\beta v_2=\gamma(v_1+v_2)+\delta(v_1-v_2)=\underbrace{\frac{\alpha+\beta}{2}}_{\gamma}(v_1+v_2)+\underbrace{\frac{\alpha-\beta}{2}}_{\delta}(v_1-v_2)}.$$

המשמעות היא כי מצאנו שניתן להביע את הווקטור $\boxed{v=\alpha v_1+\beta v_2}$ כצ"ל של הוקטורים $(v_1+v_2),(v_1-v_2)$ ולכן בסה"כ הוכחנו גם את $sp\{v_1,v_2\}\subseteq sp\{v_1+v_2,v_1-v_2\}$.

ובזה סיימנו.

בהצלחה רבה לכולם !

מיטל