אנליזה מודרנית

תקציר

סיכום זה מבוסס על הרצאותיו של ד"ר שמחה הורוביץ, אוניברסיטת בר אילן, סמסטר א', תשע"ג 2012. אני מאחל בהצלחה לכל קורא ומתעניין בתחום! עידכון אחרון התבצע ב-6 במרץ 2013. ספר מומלץ לקורס הוא Royden-Real Analysis.

במידה ומישהו רוצה לשתף הערות או להודיע על טעות כלשהי, שלחו לי למייל mail@studenteen.org. כל הזכויות שמורות לאתר Studenteen.org.

תוכן עניינים

חלק I

מידת לבג

ברוב הקורס נדבר על אינטגרל לבג. אינטגרל לבג הוא הכללה של אינטגרל רימן. כזכור, קיימות שתי גישות שקולות להגדרת אינטגרל רימן.

1 תזכורת לאינטגרל רימן

הגדרה 1.1 אינטגרל רימן מוגדר בעזרת "סכומי רימן". בפרט אם $f(x)$ מוגדרת וחסומה ב-$[a,b]$, נגדיר חלוקה P של $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

סכום רימן הבנוי על P הוא סכום מהסוג

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

עבור $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ כלשהו.

כאשר חלוקה נעשית עדינה ביותר כל סכומי רימן שואפים לגבול אחד. אם כן, f נקראית **אינטגרבילית** ו-$\int_a^b f(x)dx$ הוא הגבול הנ"ל. עבור $f(x) \geq 0$ רציפה למקטועין האינטגרל מתכנס לשטח מתחת לגרף.

אינטגרל רימן אכן טוב, אך יש בו מספר דברים לא טובים,

1. יש הרבה פונקציות לא אינטגרביליות רימן, למשל פונקציית דיריכלה[1].
2. אין אפיון לפונקציות האינטגרביליות רימן.
3. אם $f_n \to f$ במ"ש[2] בקטע $[a,b]$ וכולן אינטגרביליות רימן, אז

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f$$

אבל אם $f_n \to f$ נקודתית, אין משפט שיאמר מתי $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.

4. אם $f(x)$ רציפה ב-$[a,b]$, אזי

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$$

ומה קורה אם f אינה רציפה ב-$[a,b]$?

[1] כזכור, D פונקציית דיריכלה מקיימת $D(x) = 1$ לכל $x \in \mathbb{Q}$ ו-$D(x) = 0$ עבור $x \notin \mathbb{Q}$.
[2] במידה שווה.

5. אם $f'(x)$ רציפה ב-$[a,b]$ אזי

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx$$

זה גם נכון אם $f(x)$ רציפה ו-$f'(x)$ רציפה למקוטעין. עד היכן אפשר להכליל נוסחא זו? אין תשובה מדויקת בתורת רימן.

6. אם ל-$f(x)$ על $[-\pi,\pi]$ יש טור פוריה פורמלי

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$$

משפט פרסבל אומר כי

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2$$

שאלה הפוכה שניתן לשאול היא אם $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2<\infty$, האם הטור $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ מתכנס באיזשהו מובן לפונקציה **אינטגרבילית** $f(x)$ שהטור הוא טור פוריה שלה? בתורת רימן זה אינו כך, אך בתורת לבג **כן**.

2 מידת לבג

אפשר לומר שתחילת החידוש של לבג היא שבמקום לחלק את ציר ה-x, אפשר לחלק את ציר ה-y. נחלק את ציר ה-y עם חלוקה $y_0,\ldots,y_n$, כאשר נניח וחלק מהגרף נמצא בקטע $[y_{k-1},y_k]$. השטח מתחת לגרף מקורב ע"י **סכום לבג**,

$$\sum_{k=1}^{n}y_k m(E_k)$$

כאשר $E_k=\{x\in[a,b]\mid y_{k-1}\le f(x)\le y_k\}$, ו-$m(E_k)$ היא המידה או הגודל של E_k.

כאשר החלוקה נעשית עדינה ביותר, נדרוש שכל סכומי לבג ישאפו לגבול אחד. אם כן, f אינטגרבילית לבג ב-$[a,b]$ והגבול הוא

$$\int_{[a,b]}f dm$$

כאשר $f(x)$ רציפה ב-$[a,b]$, אז $E_k=\{x\in[a,b]\mid y_{k-1}\le f(x)\le y_k\}$ הוא איחוד של קטעים, ומידת E_k היא סכום הקטעים. אבל אם f אינה רציפה, אז הקבוצות E_k הן קבוצות כלשהן, ונשאלת השאלה כיצד להגדיר מידת קבוצה כלשהי.

2.1 מידה

הגדרה 2.1 תהי $E \subset \mathbb{R}$ קבוצה כלשהי. נגדיר את המידה החיצונית של E ע"י

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

כאשר I_n הם קטעים פתוחים ו-$|I_n|$ הוא אורך I_n.

בגלל שמדובר ב-inf, עבור כל $E \subset \mathbb{R}$, הערך $m^*(E)$ מוגדר היטב ומקיים

$$0 \le m^*(E) \le +\infty$$

משפט 2.2 מתקיים:

1. $m^*(\{x_0\}) = 0 = m^*(\emptyset)$ לכל $x_0 \in \mathbb{R}$.
2. אם $A \subset B \subset \mathbb{R}$, אזי $m^*(A) \le m^*(B)$.

הוכחה.

1. טריוויאלי.
2. כל כיסוי פתוח של B הוא גם כיסוי פתוח של A. לכן $m^*(A)$ הוא inf של יותר מספרים מ-$m^*(B)$ ומתקיים

$$m^*(A) \le m^*(B)$$

■

משפט 2.3 אם $E \subset \mathbb{R}$ קטע כלשהו אז $m^*(E) = |E|$.

הוכחה. מושארת כתרגיל. ■

משפט 2.4 אם $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות ב-$\mathbb{R}$ ואם $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, אזי

$$m^*(E) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$$

הוכחה. יהי $\epsilon > 0$ נתון. לכל $n \in \mathbb{N}$ נוכל לבחור קטעים פתוחים $(I_{k,n})_{k=1}^{\infty}$ כך ש-

$$E_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{k,n}$$

ו-

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_{k,n}| \leq m^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$$

לפי זה, הקטעים $(I_{k,n})_{k,n=1}^{\infty}$ מהווים כיסוי פתוח ל-$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. לכן,

$$m^*(E) \leq \sum_{k,n=1}^{\infty} |I_{k,n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |I_{k,n}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)\right] + \epsilon$$

ולכן בהכרח $m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$. ■

הגדרה 2.5 תהי $E \subset \mathbb{R}$ קבוצה כלשהי. הזזה של E היא קבוצה מהסוג

$$x_0 + E = E + x_0 = \{x_0 + y : y \in E\}$$

משפט 2.6 תהי $E \subset \mathbb{R}$ ו-$x_0 \in \mathbb{R}$ מספר כלשהו. אזי

$$m^*(x_0 + E) = m^*(E)$$

ז"א, m^* שמורה תחת הזזה.

הוכחה. אם E מכוסה ע"י $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, אז $x_0 + E$ מכוסה ע"י $\bigcup_{n=1}^{\infty} x_0 + I_n$, וכיוון ש-

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_0 + I_n|$$

נקבל $m^*(E) = m^*(x_0 + E)$, כנדרש. ■

2.2 תכונות המידה

תכונות רצויות למידה m על $\mathbb{R}$ הן,

1. לכל $E \subset \mathbb{R}$, $m(E)$ מוגדרת ומקיימת $0 \leq m(E) \leq \infty$.
2. לכל קטע $E \subset \mathbb{R}$, מתקיים $m(E) = |E|$.
3. m שמורה תחת הזזה.
4. אם $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n$ [3] אזי $m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$.

נשים לב כי נובע מתכונות אלה כי אם $E \subset F \subset \mathbb{R}$ אז $m(E) \leq m(F)$.

טענה 2.7 לא קיימת מידה m המקיימת את כל ארבעת התכונות הנ"ל.

הוכחה. נוכיח זאת באמצעות אקסיומת הבחירה. נניח בשלילה כי קיימת m שכזו, ונגיע לסתירה.

נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}$ באופן הבא,

$$x \backsim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

יחס זה מחלק את $\mathbb{R}$ למספר לא בר מניה של מחלקות שקילות. ניתן לראות כי כל מחלקת שקילות חותכת את הקטע $(0,1)$. לפי אקסיומת הבחירה, קיימת קבוצה $E \subset (0,1)$ שמכילה בדיוק **נציג אחד** מכל מחלקת שקילות. נוכיח כי

1. אם $x \in (0,1)$, קיים $r \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)$ כך ש-$x \in E + r$.
2. אם $s \neq r$ שייכים ל-$\mathbb{Q}$ אז $\emptyset = (E+r) \cap (E+s)$.

נוכיח אותן בהתאמה,

1. אם $x \in (0,1)$, אז קיים $y \in E$ יחיד כך ש-$y \backsim x$. ז"א, $x - y = r \in \mathbb{Q}$, וממילא $x = y + r \in E + r$, וכיוון ש-$x, y \in (0,1)$ אז $r = x - y \in (-1,1)$, והוכחנו את הדרוש.
2. נניח ש-$x \in (E+r) \cap (E+s)$, אזי קיימים $y, z \in E$ כך ש-$x = y + r = z + s$. מכאן ש-$y - z = s - r \in \mathbb{Q}$, ולכן $z \backsim y$, וכיוון ששניהם שייכים ל-E זו סתירה לכך ש-E מכילה רק איבר אחד מכל מחלקת שקילות.

כעת, נרשום את כל הרציונלים ב-$(-1,1)$ ע"י הסדרה $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, ולפי הטענה הראשונה, מתקיים $(0,1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E + r_n$, וכיוון ש-$E \subset (0,1)$ ו-$r_n \in (-1,1)$, אזי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $E + r_n \subset (-1,2)$, ולכן $\bigcup_{n=1}^{\infty} E + r_n \subset (-1,2)$, ולסיכום מתקיים $(0,1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E + r_n \subset (-1,2)$

כעת, בגלל שארבעת התנאים מתקיימים, מתקיים כי $m[(0,1)] \leq m\left(\biguplus E + r_n\right) \leq m[(-1,2)]$ כאשר האיחוד זר בגלל הטענה השניה שהוכחנו. לפי התכונה השניה,

$$1 \leq m\left(\biguplus E + r_n\right) \leq 3$$

[3] איחוד זר.

ולפי התכונה השלישית

$$1 \le \sum_{n=1}^{\infty} m(E+r_n) \le 3$$

וכיוון שכל $E+r_n$ הזזה של E, התכונה השלישית אומרת שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $m(E)=m(E+r_n)$.

ולכן

$$1 \le \sum_{n=1}^{\infty} m(E) \le 3$$

וזו **סתירה**. ■

בכך הוכחנו שאי-אפשר לקיים את כל ארבעת התנאים לעיל. כיוון ש-m^* מקיימת את $(1),(2),(3)$, היא בהכרח אינה מקיימת את (4). ז"א, היא אינה $\sigma-$חיבורית. למעשה, אפשר להוכיח שקיים איחוד זר סופי $E=\biguplus_{k=1}^{n} E_k$ כך ש-$m^*(E) < \sum_{k=1}^{n} m^*(E_k)$.

אבל לוותר על תכונה (4) זה בלתי אפשרי, ולכן החליטו לוותר על תכונה (1) ולהגדיר אוסף של קבוצות "הקבוצות המדידות לבג", כך שצמצום m^* להן מקיים את (4).

2.3 קבוצות מדידות לבג

נאמץ את ההגדרה של Cartheodory לכך.

הגדרה 2.8 תהי $E \subset \mathbb{R}$ קבוצה כלשהי. נאמר ש-E מדידה לבג[4] אם לכל $A \subset \mathbb{R}$ מתקיים

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*\left(A \cap E^C\right)$$

כאשר E^C המשלים של E.

הערה 2.9 אם E ו-F מדידות ואם $E \cap F = \emptyset$, אז $m^*(E \cup F) = m^*(E) + m^*(F)$.

הוכחה. נגדיר $A = E \uplus F$. לפי הגדרת המדידות של E, מתקיים $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*\left(A \cap E^C\right)$, ז"א, $m(E \uplus F) = m^*(E) + m^*(F)$. ■

[4] או רק מדידה.

משפט 2.10 מתקיים:

1. $E \subset \mathbb{R}$ מדידה $\iff$ E^C מדידה.
2. $E \subset \mathbb{R}$ מדידה $\iff$ לכל $A \subset \mathbb{R}$ מתקיים $m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*\left(A \cap E^C\right)$.
3. אם $m^*(E) = 0$ אז E מדידה.
4. אם E מדידה אז לכל $x_0 \in \mathbb{R}$, מתקיים $E + x_0$ מדידה.

הוכחה. נוכיח בהתאמה:

1. תחילה נניח ש-E מדידה, ולכן עבור כל $A \subset \mathbb{R}$ מתקיים

$$m^*(A) = m^*(A \cap E^C) + m^*(A \cap E) = m^*(A \cap E^C) + m^*\left(A \cap \left(E^C\right)^C\right)$$

וכיוון שזה נכון לכל $A \subset \mathbb{R}$, E^C מדידה. אם E^C מדידה, אז ההוכחה הנ"ל נותנת לנו ש-$E = E^{C^C}$ מדידה, והוכחנו את א'.

2. תמיד מתקיים $A = (A \cap E) \uplus (A \cap E^C)$, ולכן לפי משפט **2.4**, $m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$. לכן, כדי להוכיח ש-$E$ מדידה, הכרחי ומספיק לקיים את אי-השיוויון ההפוך

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$$

לכל $A \subset \mathbb{R}$, וזה הרי נתון. הכיוון השני טריוויאלי.

3. נתון ש-$m^*(E) = 0$. כעת אם $A \subset \mathbb{R}$, הרי $A \cap E \subset E$, ולכן לפי משפט **2.4** $m^*(A \cap E) \leq m^*(E) = 0$, ולכן $m^*(A \cap E) = 0$. יתר על כן, $A \cap E^C \subset A$, ולכן

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E^C)$$

ולכן נובע כי

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E^C) + 0 = m^*(A \cap E^C) + m^*(A \cap E)$$

ועפ"י סעיף (2) הוכחנו ש-E מדידה.

4. נתון ש-E מדידה ו-$x_0 \in \mathbb{R}$. נוכיח כי $E + x_0$ מדידה. ניקח $A \subset \mathbb{R}$ כלשהי. כעת,

$$m^*(A) = m^*(A - x_0) = m^*\left((A - x_0) \cap E\right) + m^*\left((A - x_0) \cap E^C\right)$$

כי E מדידה. וזה שווה ל-

$$m^*\left(A \cap (E + x_0)\right) + m^*\left(A \cap (E^C + x_0)\right) = m^*\left(A \cap (E + x_0)\right) + m^*\left(A \cap (E + x_0)^C\right)$$

ולכן $E + x_0$ מדידה.

■

משפט 2.11 כל קטע מהסוג $E=(a,\infty)$ עבור $a\in\mathbb{R}$ הוא קבוצה מדידה.

הוכחה. ניקח $A\subset\mathbb{R}$ כלשהי, ונגדיר

$$\begin{array}{c} A_1 = A\cap(a,\infty) = A\cap E \\ A_2 = A\cap(-\infty,a] = A\cap E^C \end{array}$$

ומספיק שנוכיח כי $m^*(A)\geq m^*(A_1)+m^*(A_2)$. לצורך זה, יהי $\epsilon>0$ נתון.
לפי הגדרת m^*, יש כיסוי פתוח $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ כך ש-

$$m^*(A)\leq\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\leq m^*(A)+\epsilon$$

לכל $n\in\mathbb{N}$ נחלק $I_n=I_n'\cup I_n''$, כאשר

$$\begin{array}{c} I_n' = I_n\cap(a,\infty) \\ I_n'' = I_n\cap(-\infty,a] \end{array}$$

ולפי הבנייה

$$\begin{array}{c} A_1\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n' \\ A_2\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n'' \end{array}$$

ולפי משפט **2.4**

$$m^*(A_1)+m^*(A_2)\leq\sum_{n=1}^{\infty}|I_n'|+\sum_{n=1}^{\infty}|I_n''|=\sum_{n=1}^{\infty}|I_n'|+|I_n''|=\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\leq m^*(A)+\epsilon$$

הדבר נכון לכל $\epsilon>0$ ולכן $m^*(A)\geq m^*(A_1)+m^*(A_2)$ ומכאן ש-$E=(a,\infty)$ קבוצה מדידה. ■

נוכיח כעת מספר משפטים מופשטים הקשורים לקבוצות מדידות.

משפט 2.12 נניח $E_1,E_2\subset\mathbb{R}$ מדידות. אזי, $E_1\cup E_2$ מדידה.

הוכחה. צריך להוכיח שלכל $A\subset\mathbb{R}$ מתקיים $m^*(A)\geq m^*(A\cap(E_1\cup E_2))+m^*\left(A\cap(E_1\cup E_2)^C\right)$.
אבל ידוע כי

$$A\cap(E_1\cup E_2)=(A\cap E_1)\cup(A\cap E_2)\subset(A\cap E_1)\cup(A\cap E_1^C\cap E_2)$$

ולפי דה-מורגן מתקיים

$$A\cap(E_1\cup E_2)^C=A\cap E_1^C\cap E_2^C$$

ולכן לפי זה, מתקיים

$$m^*(A\cap(E_1\cup E_2))+m^*\left(A\cap(E_1\cup E_2)^C\right)\leq m^*(A\cap E_1)+m^*(A\cap E_1^C\cap E_2)+m^*(A\cap E_1^C\cap E_2^C)=$$

$$=m^*(A\cap E_1)+m^*(A\cap E_1^C)=m^*(A)$$

וצעדי השיוויון נכונים כי E_1,E_2 **מדידות**, ולכן הוכחנו כי $E_1\cup E_2$ מדידה. ■

מסקנה 2.13 יהיו $E_1,E_2,\dots,E_n$ קבוצות מדידות. אזי,

1. $\bigcup_{k=1}^n E_k$ מדידה.
2. $\bigcap_{k=1}^n E_k$ מדידה.

הוכחה. נוכיח את הסעיפים בהתאמה,

1. מיידי ע"י אינדוקציה.
2. כיוון שכל E_k מדידה, אזי ממשפט **2.10** נובע שכל E_k^C מדידה. לפי דה-מורגן,

$$\bigcap_{k=1}^n E_k=\left(\bigcup_{k=1}^n E_k^C\right)^C$$

ולפי המסקנה הראשונה, זוהי קבוצה מדידה.

■

ובכך, הוכחנו שהקבוצות המדידות מהוות *אלגברה* (בוליאנית) של קבוצות. ז"א, הן אוסף של תתי קבוצות ב-$\mathbb{R}$ שסגור תחת איחוד סופי ומשלים, וממילא סגור תחת חיתוך סופי. כעת, נרצה להוכיח סגירות גם עבור **איחוד אינסופי**, ולשם כך נוכיח מספר דברים קודם לכן.

משפט 2.14 יהיו $E_1,\dots,E_n$ קבוצות מדידות זרות בזוגות, ונגדיר $E=\biguplus_{k=1}^n E_k$. אזי לכל $A\subset\mathbb{R}$

$$m^*(A\cap E)=\sum_{k=1}^n m^*(A\cap E_k)$$

הוכחה. נוכיח זאת באינדוקציה על n. עבור $n=1$, הטענה טריוויאלית. נניח שהמשפט כבר הוכח לכל אוסף של $n-1$ קבוצות, ונוכיח אותו ל-n הקבוצות $E_1,\dots,E_n$ כמו בציטוט המשפט.

ובכן, E_n מדידה ולכן $m^*(A\cap E)=m^*((A\cap E)\cap E_n)+m^*((A\cap E)\cap E_n^C)$. כיוון ש-$E=\biguplus_{k=1}^n E_n$, אז

$$E\cap E_n=E_n, E\cap E_n^C=\biguplus_{k=1}^{n-1} E_k$$

ולכן השיוויון הנ"ל אומר

$$m^*(A\cap E)=m^*(A\cap E_n)+m^*\left(A\cap\biguplus_{k=1}^{n-1}E_k\right)=m^*(A\cap E_n)+\sum_{k=1}^{n-1}m^*(A\cap E_k)=\sum_{k=1}^{n}m^*(A\cap E_k)$$

כאשר השיוויון השני נובע מהנחת האינדוקציה, ולכן הוכחנו את הדרוש. ■

מסקנה 2.15 בתנאים של המשפט **2.14**, $m^*(E)=\sum_{k=1}^n m^*(E_k)$. כדי להוכיח זאת, ניקח במשפט הקודם $A=\mathbb{R}$ או $A=E$.

כעת, נביא משפט נוסף כ"השכלה כללית",

משפט 2.16 תהי X קבוצה ו-S אלגברה של תת-קבוצות של X. נניח ש-$(E_n)_{n=1}^{\infty}$ שייכות ל-S. אזי, **קיימת** סדרה $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ של קבוצות ב-S כך ש-

1. לכל n, $F_n\subset E_n$.
2. ה-F_n זרות בזוגות.
3. לכל n מתקיים $\bigcup_{k=1}^n F_n=\bigcup_{k=1}^n E_k$.
4. $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

הוכחה. F_n תהיה הקבוצה שמכילה את כל מה שהתחדש ב-E_n. ז"א,

$$F_n=E_n\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}E_k\right)^C=E_n\cap E_1^C\cap E_2^C\cap\cdots\cap E_{n-1}^C$$

נוכיח כעת את התנאים,

1. $F_n=E_n\cap Q$ כש-Q קבוצה כלשהי, ולכן $F_n\subset E_n$.
2. אם $n>m$ הרי $F_n\subset E_m^C$ כי F_n הוא חיתוך E_m^C עם עוד קבוצות, ואילו $F_m\subset E_m$ ולכן $F_n\cap F_m=\emptyset$.
3. נוכיח באינדוקציה. עבור $n=1$ הטענה היא $E_1=F_1$, וזה נכון **לפי ההגדרה**. נניח שזה כבר הוכח עבור $n-1$, כלומר,

$$\bigcup_{k=1}^{n-1}E_k=\bigcup_{k=1}^{n-1}F_k$$

כעת,

$$\bigcup_{k=1}^{n}F_k=\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}F_k\right)\cup F_n=\bigcup_{k=1}^{n-1}F_k\cup\left[E_n\cap E_1^C\cap E_2^C\cap\cdots\cap E_{n-1}^C\right]=$$

ולפי הנחת האינדוקציה

$$= \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k \cup \left[E_n \cap E_1^C \cap \cdots \cap E_{n-1}^C\right] = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$$

4. רוצים להוכיח

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

כיוון שלכל k, $F_k \subset E_k$, אז אגף שמאל מוכל באגף ימין. לצד השני אם $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ אז קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$x \in E_n$. ממילא

$$x \in E_n \subset \bigcup_{k=1}^{n} E_k = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$$

■

כעת נוכל להוכיח את המשפט החשוב כי איחוד **בן מניה** של קבוצות מדידות לבג גם מדיד.

משפט 2.17 יהיו $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ קבוצות מדידות לבג. נגדיר $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. אזי, E מדידה לבג.

הוכחה. ללא הגבלת הכלליות, ה-E_n זרות בזוגות. כי אם לא, אז נוכל להחליפן ע"י קבוצות זרות מדידות F_n[5] ו-$E = \bigcup E_n = \bigcup F_n$.

כעת, עבור כל n נגדיר $G_n = \biguplus_{k=1}^{n} E_k$. מתקיים שלכל n, $G_n \subset E = \biguplus_{k=1}^{\infty} E_n$ ולכן $E^C \subset G_n^C$. כעת, ניקח קבוצה כלשהי $A \subset \mathbb{R}$, ונעיר שמכיוון שכל G_n מדידה[6], אז לכל n,

$$m^*(A) = m^*(A \cap G_n) + m^*(A \cap G_n^C) \geq m^*(A \cap G_n) + m^*(A \cap E^C)$$

עפ"י משפט **2.14**, נקבל כי זה שווה ל-

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k)\right) + m^*(A \cap E^C)$$

נשאיף $n \to \infty$ להשיג

$$m^*(A) \geq \left(\sum_{k=1}^{\infty} m^*(A \cap E_k)\right) + m^*(A \cap E^C)$$

[5] כמו במשפט **2.16**

[6] איחוד סופי של קבוצות מדידות.

נסמן נוסחא זו ב-(1).

וכיוון ש-$E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $A\cap E=\bigcup_{k=1}^{\infty} A\cap E_k$ וממילא $m^*(A\cap E)\le\sum_{k=1}^{\infty} m^*(A\cap E_k)$. מכאן נוכל להסיק בעזרת אי-השיוויון לעיל כי

$$m^*(A)\ge m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C)$$

והוכחנו ש-E מדידה. ■

מסקנה 2.18 במצב של משפט **2.17**,

$$m^*(E)=m^*\left(\biguplus_{k=1}^{\infty} E_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$$

הוכחה. בנוסחא (1) נציב $A=E$ לומר

$$m^*(E)\ge\sum_{k=1}^{\infty} m^*(E\cap E_k)+m^*(E\cap E^C)$$

ז"א,

$$m^*(E)\ge\sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$$

וכידוע תמיד $m^*(E)\le\sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$, ולכן יש שיוויון! ■

מסקנה 2.19 יהיו $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ קבוצות מדידות לבג[7], אז $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ מדידה.

הוכחה. מתקיים

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^C\right)^C$$

■

מסקנה 2.20 אם $S\subset\mathbb{R}$ תת קבוצה **בת מנייה**, אז S מדידה לבג ו-$m^*(S)=0$.

[7]לאו דווקא זרות בזוגות!

הוכחה. אפשר לכתוב $S = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$ כאשר ה-x_n-נקודות ב-S. לפי משפט **2.2**, $m^*(\{x_n\}) = 0$, ולפי משפט **2.10** כל $\{x_n\}$ מדידה[8], ולפי משפט **2.17**,

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$$

מדידה, ולפי המסקנה הראשונה,

$$m^*(S) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

■

מסקנה 2.21 הקבוצה E שבנינו בעזרת אקסיומת הבחירה היא לא מדידה לבג.

הוכחה. לפי הבנייה קיבלנו

$$(0,1) \subset \biguplus_{r\in\mathbb{Q}\cap(-1,1)} E + r \subset (-1,2)$$

בדרך השלילה נניח ש-E מדידה, עפ"י משפט **2.10** כל $E + r$ מדידה, ולפי משפט **2.2** מתקיים

$$m^*\left[(0,1)\right] \leq m^*\left(\biguplus_{r\in\mathbb{Q}\cap(-1,1)} E + r\right) \leq m^*(-1,2)$$

עפ"י משפט **2.10** מתקיים

$$1 \leq \sum_{r\in\mathbb{Q}\cap(-1,1)} m^*(E + r) \leq 3$$

ז"א, $1 \leq \sum_{r\in\mathbb{Q}\cap(-1,1)} m^*(E) \leq 3$, וזה בלתי אפשרי. הסתירה מוכיחה ש-E לא מדידה. ■

הגדרה 2.22 הצמצום של m^* על הקבוצות המדידות הוא **מידת לבג** על $\mathbb{R}$, ומסומן ב-m.

כעת, נכליל את המושג של אוסף הקבוצות המדידות לבג.

[8] כי מידתה החיצונית היא 0.

2.4 σ-אלגברה ואלגברת בורל

הגדרה 2.23 תהי X קבוצה כלשהי. אוסף $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(x)$ נקרא σ אלגברה אם

1. $E \in \mathcal{S} \iff E^C \in \mathcal{S}$.
2. אם $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ שייכים ל-S אזי $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{S}$.[9]
3. $\emptyset \in \mathcal{S}$.[10]

מהמשפטים הקודמים נובע שהקבוצות המדידות לבג מהוות σ אלגברה של תת קבוצות של $\mathbb{R}$. נאפיין חלק מהקבוצות ב"אלגברת לבג" $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ של קבוצות מדידות.

ובכן, במשפט **2.11** הוכחנו שכל קטע מהסוג (a, ∞) מדיד. כמו כן כל קטע מהסוג $(-\infty, b)$ מדיד ולכן החיתוך שלהם (a, b) מדיד. מכאן, שכל איחוד בן מנייה של קטעים פתוחים מדיד, ז"א, כל קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}$ מדידה. ע"י משלים, כל קבוצה סגורה מדידה.

משפט 2.24 תהי X קבוצה כלשהי, ויהי $\mathcal{T}$ אוסף של תתי קבוצות של X. אזי, קיימת σ אלגברה מינימלית $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ כך ש-$\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$.

הוכחה. (בקצרה) $\mathcal{P}(X)$ היא σ אלגברה שמכילה את $\mathcal{T}$. קל להוכיח שחיתוך σ אלגברות הוא σ אלגברה, ולכן קיימת

$$\mathcal{S} = \bigcap_{T \subset A_\alpha} A_\alpha$$

כאשר כל A_α היא σ אלגברה. ■

הגדרה 2.25 יהי X מרחב טופולוגי. אלגברת בורל $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ היא ה-σ-אלגברה המינימלית של תתי קבוצות של X שמכילה את כל הקבוצות הפתוחות ב-X.

מסקנה 2.26 מכל הנ"ל נסיק ש-$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

הוכחה. הרי אלגברת לבג $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ היא σ אלגברה המכילה את כל הקבוצות הפתוחות ב-$\mathbb{R}$. לכן בהכרח היא מכילה את כל ה-σ-אלגברה המינימלית שיש בה את כל הקבוצות הפתוחות ב-$\mathbb{R}$. ■

דוגמא. ניתן דוגמאות של קבוצות בורל,

1. קבוצות G_δ שהן חיתוכים בני מנייה של קבוצות פתוחות.
2. קבוצות F_σ שהן איחודים בני מנייה של קבוצות סגורות.
3. קבוצות $G_{\delta\sigma}$ שהן איחודים בני מנייה של קבוצות G_δ.
4. קבוצות $F_{\sigma\delta}$ שהן חיתוכים בני מנייה של קבוצות F_σ.

---

[9] וממילא גם $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.
[10] ומכאן גם $X \in S$.

5. כמו כן, יש קבוצות $G_{\delta\sigma\delta\sigma\delta\sigma\delta\sigma}$...

כל פעם שמוסיפים σ או δ, מוסיפים קבוצות בורל חדשות, אבל כולן ביחד אינם מרכיבים את אלגברת בורל.

משפט 2.27 תהי $E \subset \mathbb{R}$ קבוצה מדידה לבג. אז קיימת קבוצה מדידה F כך ש-$m(F) = 0$ וקבוצה S מטיפוס G_δ כך ש-

$$S = E \uplus F$$

או

$$E = S \backslash F$$

הוכחה. כאן נוכיח את המשפט במקרה ש-$m(E) < \infty$. לפי ההגדרה של m[11], עבור $n \in \mathbb{N}$ קיים כיסוי פתוח $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ כך ש-

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

ו-

$$m(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leq m(E) + \frac{1}{n}$$

נגדיר קבוצה פתוחה $S_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, ולכן $E \subset S_n$ ומתקיים

$$m(E) \leq m(S_n) \leq m(E) + \frac{1}{n}$$

נגדיר $S \in G_\delta$ ע"י $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$. כיוון שלכל n, $E \subset S_n$ גם מתקיים $E \subset S$, ולכל n $S \subset S_n$, וממילא לכל n

$$m(E) \leq m(S) \leq m(S_n) \leq m(E) + \frac{1}{n}$$

נשאיף $n \to \infty$ להסיק ש-$m(S) = m(E)$, ולבסוף נגדיר $F = S \backslash E$ ולכן $S = E \uplus F$, וכיוון ש-S, E, F מדידות

$$m(S) = m(E) + m(F)$$

ובגלל ש-$m(E) < \infty$ נוכל להסיק ש-$m(F) = m(S) - m(E) = 0$, ולכן סה"כ $S = E \uplus F$ כאשר $S \in G_\delta$ ו-$m(F) = 0$[12]. ■

[11] שזה m^*.

[12] אפשר להכליל את התוצאה למקרה ש-$m(E) = \infty$.

3 מידות כלליות

נכליל כעת את המושג של מידת לבג עבור קבוצות כלשהן.

הגדרה 3.1 תהי X קבוצה כלשהי ותהי $\mathcal{S}$ σ אלגברה של תתי קבוצות של X. הזוג $(X, \mathcal{S})$ נקרא **מרחב מדיד**.

כעת, נגדיר את המושג של מידה על על מרחב מדיד,

הגדרה 3.2 יהי $(X, \mathcal{S})$ מרחב מדיד. מידה (חיובית) על $(X, \mathcal{S})$ היא פונקציה

$$\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$$

כך ש-

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. אם $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ ב-$\mathcal{S}$ זרות בזוגות אז

$$\mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

לפעמים קוראים ל-$\mathcal{S}$ "הקבוצות המדידות לפי μ, או $d\mu$". השלישייה $(X, \mathcal{S}, \mu)$ נקראית "מרחב מידה".

דוגמאות.

1. מידת לבג m על המרחב $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$.
2. מידת לבג m על המרחב $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
3. מידת לבג m_n על $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ כאשר $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ היא אלגברת לבג על $\mathbb{R}^n$. כדי לבנות את m_n נתחיל עם מידה חיצונית m_n^*, עבור כל קבוצה $E \subset \mathbb{R}^n$ נגדיר

$$m_n^*(E) = \inf\left\{\sum_{m=1}^{\infty} V(I_m) \mid E \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m\right\}$$

כאשר I_m תיבות פתוחות ב-$\mathbb{R}^n$ ו-$V(I_m)$ הוא הנפח של I_m. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ היא אלגברת כל הקבוצות המדידות $E \subset \mathbb{R}^n$, ז"א, כל E כך שלכל $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$m_n^*(A) = m_n^*(A \cap E) + m_n^*(A \cap E^C)$$

4. אם X קבוצה כלשהי, אפשר להגדיר את "מידת הספירה" על כל $\mathcal{P}(X)$ בפרט אם $E \subset X$ כלשהי אז $\mu(E)$ הוא מספר האיברים של E.

5. מידת הדלתא של דירק - אם X קבוצה כלשהי $x_0 \in X$ איבר בודד אז המידה δ_{x_0} מוגדרת על $\mathcal{P}(x)$ ע"י

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & x_0 \in E \\ 0 & x_0 \notin E \end{cases}$$

6. אם $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ הן מידות על מרחב מדיד $(X, \mathcal{S})$ אז כל צירוף ליניארי

$$(a_n \geq 0) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n$$

יוצר מידה חדשה על $(X, \mathcal{S})$. למשל, צירוף מהסוג

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{x_n}$$

נותן אזי צפיפות של מסות "a_n" בנקודות x_n.

7. אם $(X, \mathcal{S}, \mu)$ מרחב מידה חיובית, ואם $E \in \mathcal{S}$ אז הצמצום של μ ל-$\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{S}$ זו מידה.

8. אם נחבר את שתי הדוגמאות האחרונות נוכל למשל לבנות מידת לבג משוקללת על $\mathbb{R}$, מהסוג

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n m|_{(n-1,n]}$$

שכאן נתנו משקל a_n לקטע $(n-1, n]$.

9. מידה מושרית - נניח ש-$(X, \mathcal{S}, \mu)$ ממ"ח ו-$f : X \to Y$ פונקציה כלשהי לתוך Y. נאמר ש-$E \subset Y$ מדידה אם $f^{-1}(E) \in \mathcal{S}$, ונגדיר מידה

$$\nu(E) = \mu\left[f^{-1}(E)\right]$$

כעת, נוכיח מספר משפטים הקשורים לנושא. במשפטים הבאים, $(X, \mathcal{S}, \mu)$ הוא מרחב מידה חיובית.

משפט 3.3 אם $E \subset F$ מדידות[13], אז $\mu(E) \leq \mu(F)$.

הוכחה. כידוע,

$$F = E \uplus (F \backslash E)$$

ולכן

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \backslash E) \geq \mu(E)$$

■

[13] ז"א, שייכות ל-$\mathcal{S}$.

מסקנה 3.4 בנתונים של משפט **3.3** אם $\mu(E) < \infty$ אז $\mu(F\backslash E) = \mu(F) - \mu(E)$.

משפט 3.5 נניח שהקבוצות $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ שייכות ל-$\mathcal{S}$, ונרשום $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. אזי,

$$\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

הוכחה. לפי משפט **2.16** קיימות קבוצות $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ ב-$\mathcal{S}$ שהן זרות בזוגות כך שלכל n, $F_n \subset E_n$ וגם

$$E = \biguplus_{n=1}^{\infty} F_n$$

ונובע מכאן ש-

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

כאשר אי-השיווין נובע ממשפט **3.3**. ■

משפט 3.6

1. נניח ש-$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$ קבוצות ב-$\mathcal{S}$ ונרשום $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. אזי,

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

2. נניח ש-$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$ קבוצות ב-S ונניח ש-$\mu(E_1) < \infty$. נרשום $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. אזי,

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

ההוכחה נמצאת בתרגילי הבית.

4 פונקציות מדידות

בתחילת הקורס, אמרנו שלפונקציה חסומה f על $\mathbb{R}$ אפשר לבנות סכומי לבג. בפרט, נחלק את הטווח של f ע"י

$$y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n$$

ונבנה "סכום לבג",

$$\sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k)$$

כאשר:

$$E_k = \{x \in \mathbb{R} : y_{k-1} < f(x) \leq y_k\}$$

הגבול של סכומים אלה כאשר החלוקה נעשית עדינה ביותר הוא אינטגרל לבג $\int f dm$. דרישה מינימלית בשביל לבצע תכנית זו היא שלכל חלוקה ולכל k, מתקיים ש-E_k היא קבוצה מדידה.

זאת המוטיבציה להגדרה של פונקציה מדידה.

משפט 4.1 יהי $(X, \mathcal{S})$ מרחב מדיד, ותהי $f : X \to \mathbb{R}^*$ פונקציה כלשהי. אזי, התנאים הבאים שקולים:

1. לכל $\alpha \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{S}$$

2. לכל $\alpha \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{S}$$

3. לכל $\alpha \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$\{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{S}$$

4. לכל $\alpha \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{S}$$

ואם התנאים הללו מתקיימים אז אומרים ש-f מדידה $\mathcal{S}$.[14]

הוכחה. תחילה נעיר שלכל $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}^C$$

ולכן שתי הקבוצות הנ"ל שייכות ל-$\mathcal{S}$ בו-זמנית, ונובע שתנאי (1) שקול לתנאי (4). באופן דומה רואים ש-

$$(2) \iff (3)$$

[14] או פשוט מדידה.

וכעת נוכיח $(2) \iff (1)$. למעשה לכל $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X : f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\right\}$$

לפי הנתון (1) כל הקבוצות באגף ימין הן ב-$\mathcal{S}$, וכיוון ש-$\mathcal{S}$ היא σ-אלגברה גם הקבוצה באגף שמאל היא ב-$\mathcal{S}$. ז"א, לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים ש-$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{S}$ ולכן הוכחנו ש-$(2) \implies (1)$.

לכיוון השני לפיו $(1) \implies (2)$, לכל $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X : f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n}\right\}$$

לפי הנתון (2) אגף ימין שייך ל-$\mathcal{S}$ ולכן גם אגף שמאל ב-$\mathcal{S}$, והוכחנו $(1) \implies (2)$. ■

מסקנה 4.2 בנתונים של משפט **4.1**,

1. לכל $x_0 \in \mathbb{R}^*$, מתקיים $f^{-1}(x_0) \in \mathcal{S}$.
2. לכל קטע $I \subset \mathbb{R}^*$ מתקיים $f^{-1}(I) \in \mathcal{S}$.
3. אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה אז f מדידה לבג.

הוכחה. נוכיח בהתאמה,

1. מתקיים (עבור $x_0 \in \mathbb{R}$),

$$f^{-1}(x_0) = \{x \in X : f(x) \geq x_0\} \cap \{x \in X : f(x) \leq x_0\} \in \mathcal{S}$$

2. למשל עבור קטע I מהסוג $[a, b)$,

$$f^{-1}(I) = \{x \in X : f(x) \geq a\} \cap \{x \in X : f(x) < b\}$$

לשאר הקטעים ההוכחה דומה.

3. עבור $\alpha \in \mathbb{R}$ כלשהו, $E = (\alpha, \infty)$ קבוצה פתוחה. כיוון ש-f רציפה, $f^{-1}(E)$ קבוצה פתוחה ולכן היא מדידה לבג. ז"א,

$$f^{-1}(E) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$$

ו-f מדידה לבג.

■

משפט 4.3 יהי $(X, \mathcal{S})$ מרחב מדיד, ויהיו $f : X \to \mathbb{R}$ ו-$g : X \to \mathbb{R}$ פונקציות מדידות $\mathcal{S}$, ויהי $c \in \mathbb{R}$ קבוע. אזי,

1. $f \pm g$ מדידה $\mathcal{S}$.
2. $c \cdot f$ מדידה $\mathcal{S}$.
3. $f \cdot g$ מדידה $\mathcal{S}$.

הוכחה. נוכיח בהתאמה,

1. עבור $f+g$, ניקח $\alpha \in \mathbb{R}$ כלשהו ונתובן בקבוצה:

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) + g(x) < \alpha\}$$

ובכן, אם עבור $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) + g(x) < \alpha$ אז $f(x) < \alpha - g(x)$, ולכן בהכרח קיים $r \in \mathbb{Q}$ כך ש-$f(x) < r < \alpha - g(x)$. לכן נטען טענה לפיה

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) + g(x) < \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in \mathbb{R} : f(x) < r\} \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) < \alpha - r\}$$

נוכיח אותה כעת. אם x מוכל באגף שמאל, אז כנ"ל

$$f(x) + g(x) < \alpha \implies f(x) < \alpha - g(x)$$

ולכן קיים $r \in \mathbb{Q}$ כך ש-$f(x) < r < \alpha - g(x)$ ולכן $f(x) < r$ וגם $g(x) < \alpha - r$ ולכן x מוכל באגף ימין, ולהפך אם x מוכל באגף ימין, אז $f(x) < r$ וגם $g(x) < \alpha - r$, נחבר אי-שיוויונים להסיק ש-$f(x) + g(x) < \alpha$ ולכן x מוכל באגף שמאל, ולכן הוכחנו את הטענה.
כעת, נתון ש-f ו-g מדידות ולכן עבור כל $\alpha \in \mathbb{R}$ ו-$r \in \mathbb{Q}$ מתקיים ש-$\{x : f(x) < r\}$ ו-$\{x : g(x) < \alpha - r\}$ מדידות. יוצא שאגף ימין הוא איחוד בן מניה של קבוצות מדידות והיא מדידה. ההוכחה ש-$f - g$ מדידה דומה.

2. אם $c > 0$, אז לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים,

$$\{x : c \cdot f(x) < \alpha\} = \left\{x : f(x) < \frac{\alpha}{c}\right\}$$

שהיא מדידה. אם $c < 0$ אז לכל $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\{x : cf(x) < \alpha\} = \left\{x : f(x) > \frac{\alpha}{c}\right\}$$

שהיא מדידה, ואם $c = 0$ אזי $cf(x) \equiv 0$ שהיא מדידה.

3. תחילה נניח $f = g$ ונוכיח שאם f מדידה אז f^2 מדידה. ובכן אם $\alpha \leq 0$

$$\{x : f^2(x) < \alpha\} = \emptyset \in \mathcal{S}$$

ואם $\alpha > 0$ אזי,

$$\{x : f^2(x) < \alpha\} = \{x : -\sqrt{\alpha} < f(x) < \sqrt{\alpha}\}$$

וזו מדידה כי f מדידה.
במקרה הכללי פשוט נרשום,

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\left\{(f+g)^2 - (f-g)^2\right\}$$

■

הערה 4.4 לגבי $f : X \to \mathbb{R}^*$ ו-$g : X \to \mathbb{R}^*$ אזי $f(x) + g(x)$ לא מוגדרת כאשר $f(x) = \infty$ ו-$f(x) = -\infty$ או להיפך, כמו כן $f(x) - g(x)$ לא מוגדרת כאשר $f(x) = \infty$ וגם $g(x) = \infty$, ו-$f(x) \cdot g(x)$ לא מוגדרת כאשר $f(x) = 0$ ו-$g(x) = \pm\infty$ או להיפך. אבל אם f ו-g מדידות $\mathcal{S}$ ונסכים שבכל הנקודות הבעיתיות הנ"ל $f \pm g$ ו-$f \cdot g$ יקבלו את אותו ערך מסוים (למשל 0) בכולם, אז קל להוכיח ש-$f \pm g$ ו-$f \cdot g$ מדידות.

המשפט הבא יאמר שאם $\{f_n\}$ סדרת פונקציות מדידות אז

$$\sup f_n, \inf f_n, \overline{\lim} f_n, \overline{\lim} f_n$$

גם הן מדידות. כאשר פונקציות אלה מוגדרות נקודתית. ז"א, לכל $x_0 \in X$ $\{f_n(x_0)\}$ סדרת מספרים ב-$\mathbb{R}^*$ ויש לה $\sup, \inf, \overline{\lim}, \underline{\lim}$.

תזכורת. אם $\{a_n\}$ סדרה ב-$\mathbb{R}$ (או ב-$\mathbb{R}^*$) יש שתי הגדרות שקולות ל-$\overline{\lim} a_n$. בפרט, $\overline{\lim} a_n$ = הגבול החלקי המקסימלי של הסדרה = $\inf\limits_k \sup\limits_{n \geq k} a_n$.

לסדרת פונקציות $\{f_n(x)\}$, $\overline{\lim} f_n(x)$ מחושב נקודתית.

דוגמא. עבור $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, נחשב:

$$\overline{\lim} f_n(x) = \begin{cases} \infty & x < -1 \\ 1 & x = -1 \\ 0 & x \in (-1,1) \\ 1 & x = 1 \\ \infty & x > 1 \end{cases}$$

$$\underline{\lim} f_n(x) = \begin{cases} -\infty & x < -1 \\ -1 & x = -1 \\ 0 & x \in (-1,1) \\ 1 & x = 1 \\ \infty & x > 1 \end{cases}$$

וכזכור, משפט מאינפי 1 אומר ש-$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ קיים במובן הרחב $\iff$ $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$.

משפט 4.5 יהי $(X, \mathcal{S})$ מרחב מדיד, ותהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות $f_n : X \to \mathbb{R}^*$ שמדידות $\mathcal{S}$. אזי $\sup f_n(x)$, $\inf f_n(x)$, $\overline{\lim} f_n(x)$, $\underline{\lim} f_n(x)$ מדידות $\mathcal{S}$, ואם קיים $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ היא מדידה $\mathcal{S}$.

הוכחה. תחילה נגדיר $f(x) = \sup f_n(x)$ ונעיר שלכל $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} = \{x \in X \mid \forall n : f_n(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \leq \alpha\}$$

שהוא חיתוך בן מנייה של קבוצות מדידות. הדבר נכון לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ ולכן f מדידה. ואם נגדיר $g(x) = \inf f_n(x)$ אז לכל $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{x \in X : g(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\}$$

שהיא מדידה.

כעת נגדיר $h(x) = \overline{\lim} f_n(x) = \inf_k \sup_{n \geq k} f_n(x)$ לכל $k \in \mathbb{N}$ נגדיר $g_k(x) = \sup_{n \geq k} f_n(x)$ לפי מה שהוכחנו כבר כל $g_k(x)$ מדידה, ומיד נובע ש-

$$h(x) = \inf_k g_k(x)$$

אף היא מדידה. באופן דומה רואים ש-

$$\underline{\lim} f_n(x) = \sup_k \inf_{n \geq k} f_n(x)$$

מדידה, ואם $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ קיים אז הוא שווה ל-$\overline{\lim} f_n(x)$ שמדידה. ■

כעת, לאחר הקדמה ועבודה ארוכה זו, נעבור להגדרת אינטגרל לבג המוכלל.

חלק II

אינטגרל לבג הכללי

5 בנייה בשלבים

בפרק זה מדובר תמיד בממ"ח $(X, \mathcal{S}, \mu)$. עבור $f : X \to \mathbb{R}^*$ מדידה נבנה בשלבים את האינטגרל:

$$\int_X f d\mu$$

5.1 אינדיקטורים

נתחיל עם הפונקציות המדידות האלמנטריות ביותר. עבור $E \in \mathcal{S}$ נגדיר **אינדיקטור** $I_E : E \to \mathbb{R}$ ע"י

$$I_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

תרגיל פשוט לראות ש-I_E פונקציה מדידה $\iff$ E קבוצה מדידה.

5.2 פונקציות פשוטות

השלב הבא הוא להגדיר פונקציות פשוטות, שהן פונקציות מדידות $\varphi : X \to \mathbb{R}$ המקבלות מספר סופי של ערכים.
אם למשל φ מקבלת את הערכים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ אז עבור $1 \le k \le n$ נגדיר,

$$E_k = \varphi^{-1}(a_k) = \{x \in X : \varphi(x) = a_k\}$$

כיוון שכל φ מדידה כל $E_k \in \mathcal{S}$ ואז,

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}(x)$$

הוכחה. ניקח $x \in X$ כלשהו, אז $\varphi(x) = a_{k_0}$ שזה אחד הערכים $a_1, \ldots, a_n$. ממילא $x \in E_{k_0}$ ועבור $k \neq k_0$ מתקיים $x \notin E_k$. נובע שבנקודה x:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}(x) = \sum_{k \neq k_0} a_k I_{E_k}(x) + a_{k_0} I_{E_{k_0}}(x) = a_{k_0} \cdot 1 = \varphi(x)$$

■

ההצגה הנ"ל $\sum a_k I_{E_k}$ היא ההצגה הקנונית של φ, אבל למעשה כל פונקציה פשוטה ניתנת ל-∞ הצגות כצירופים ליניארים של אינדיקטורים. למשל אם $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ נתון ע"י

$$\varphi(x) = I_{[0,1]}(x)$$

וגם כן $\varphi(x) = I_{[0,\frac{1}{2}]}(x) + I_{(\frac{1}{2},1]}(x) = 2I_{[0,1]}(x) - I_{[0,\frac{1}{2})} - I_{[\frac{1}{2},1)}$.

הערה 5.1 אם φ, ψ פונקציות פשוטות ואם $c \in \mathbb{R}$ קבוע אז $\varphi \pm \psi$, $c\varphi$, $\varphi\psi$ פשוטות, כי כולן פונקציות מדידות בעלות מספר סופי של ערכים.

הגדרה 5.2 יהי $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ממ"ח ותהי $\varphi : X \to \mathbb{R}$ פונקציה פשוטה אי-שלילית $\varphi \geq 0$ עם ההצגה הקנונית:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$$

אז נגדיר את האינטגרל

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k)$$

כאשר מוסכם שאם איזה $a_k = 0$ ואותו E_k מקיים $\mu(E_k) = \infty$ אז $a_k\mu(E_k) = 0$.

בגלל ש-φ אי-שלילית והמוסכמה שלנו, האינטגרל $\int_X \varphi d\mu$ מוגדר היטב ומקיים $0 \leq \int_X \varphi d\mu \leq \infty$.

הגדרה 5.3 אם $E \subset X$ מדידה אפשר להגדיר $\int_E \varphi d\mu$ ע"י $\int_X \varphi \cdot I_E d\mu$, *או* אפשר לכתוב את $\varphi|_E$ ע"י $\sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k \cap E}$ וממילא

$$\int_E \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k \cap E)$$

קל להוכיח ששתי ההגדרות שקולות.

משפט 5.4 נניח ש-$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j I_{E_j} \geq 0$ היא פונקציה פשוטה, כאשר E_j זרות בזוגות[15]. אזי,

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j)$$

הוכחה. יהיו $b_1, b_2, \ldots, b_m$ הערכים השונים שבטווח של φ. כיוון שלכל $x \in E_j$, $\varphi(x) = a_j$, אז בהכרח כל a_j שווה לאיזה b_k. כעת, עבור $k = 1, 2, \ldots, m$ נגדיר

$$S_k = \{x \in X : \varphi(x) = b_k\}$$

אז מתקיים מכאן ש-

$$S_k = \biguplus_{a_j = b_k} E_j$$

וכיוון שהאיחוד זר, מתקיים $\mu(S_k) = \sum_{a_j = b_k} \mu(E_j)$, ולפי הבנייה שלנו, ההצגה הקנונית של φ היא

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} b_k I_{S_k}$$

[15] אך לאו דווקא קנונית.

ומכאן ש-

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^m b_k\mu(S_k) = \sum_{k=1}^m b_k \sum_{a_j=b_k} \mu(E_j) = \sum_{k=1}^m \sum_{a_j=b_k} b_k\mu(E_j) = \sum_{k=1}^m \sum_{a_j=b_k} a_j\mu(E_j) = \sum_{j=1}^n a_j\mu(E_j)$$

ומכאן הוכחנו את הדרוש. ■

משפט 5.5 יהיו $\varphi, \psi \geq 0$ פונקציות פשוטות, ו-$\alpha \geq 0$ קבוע. אזי,

1. $\int_X \alpha\varphi d\mu = \alpha \int_X \varphi d\mu$.
2. $\int_X (\varphi+\psi) d\mu = \int_X \varphi d\mu + \int_X \psi d\mu$.
3. אם $E, F \in \mathcal{S}$ ואם $E \cap F = \emptyset$ אזי

$$\int_{E \uplus F} \varphi d\mu = \int_E \varphi d\mu + \int_F \varphi d\mu$$

4. אם $0 \leq \varphi \leq \psi$, אזי

$$0 \leq \int_X \varphi d\mu \leq \int_X \psi d\mu$$

5. אם $E \in \mathcal{S}$ ואם לכל $x \in E$ $m \leq \varphi(x) \leq M$ אזי

$$m \cdot \mu(E) \leq \int_E \varphi d\mu \leq M \cdot \mu(E)$$

הוכחה.

1. נרשום את ההצגה הקנונית של φ ע"י $\varphi = \sum_{k=1}^n a_k I_{E_k}$, ואז $\alpha\varphi = \sum_{k=1}^n \alpha a_k I_{E_k}$, ולכן לפי ההגדרה

$$\int_X \alpha\varphi d\mu = \sum_{k=1}^n \alpha a_k \mu(E_k) = \alpha \sum_{k=1}^n a_k \mu(E_k) = \alpha \int_X \varphi d\mu$$

2. נרשום את ההצגות הקנוניות $\varphi = \sum_{k=1}^n a_k I_{E_k}, \psi = \sum_{j=1}^m b_j I_{F_j}$. כיוון שה-$E_k$ וה-F_j זרות בזוגות גם הקבוצות $E_k \cap F_j$ זרות בזוגות, ובקבוצה $E_k \cap F_j$ מתקיים ש-$\varphi(x) = a_k$ ו-$\psi(x) = b_j$ וכמובן $(\varphi+\psi)(x) = a_k + b_j$, ולכן

$$\int_X (\varphi+\psi) d\mu = \sum_{j,k} (a_k+b_j)\mu(E_k \cap F_j) = \sum_{j,k} a_k\mu(E_k \cap F_j) + \sum_{j,k} b_k\mu(E_k \cap F_j) = \int_X \varphi d\mu + \int_X \psi d\mu$$

כאשר השיוויון האחרון נובע ממשפט **5.4**, ולכן הוכחנו את הדרוש.

3. כיוון ש-$E \cap F = \emptyset$, אז מתקיים

$$I_{E\cup F}(x) = I_E(x) + I_F(x)$$

ומכאן נובע ש-

$$\int_{E\uplus F} \varphi d\mu = \int_X \varphi I_{E\uplus F} d\mu = \int_X (\varphi I_E + \varphi I_F) d\mu = \int_X \varphi I_E d\mu + \int_X \varphi I_F d\mu = \int_E \varphi d\mu + \int_F \varphi d\mu$$

4. נתון ש-$0 \leq \varphi \leq \psi$, אם $\varphi = \sum_{k=1}^n a_k I_{E_k}$, אז

$$\int \varphi d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \mu(E_k) \geq 0$$

כמו כן אם $0 \leq \varphi \leq \psi$, מתקיים $\psi = \varphi + (\psi - \varphi)$ כאשר גם $\psi - \varphi$ פשוטה, ולפי סעיף (2)

$$\int \psi = \int \varphi + \int (\psi - \varphi) \geq \int \varphi$$

5. נתון שלכל $x \in E$ מתקיים $m \leq \varphi(x) \leq M$, ולכן לפי סעיף (4)

$$\int_E m d\mu \leq \int_E \varphi d\mu \leq \int_E M d\mu$$

$$\implies m\mu(E) \leq \int_E \varphi d\mu \leq M\mu(E)$$

ואם $\mu(E) = 0$, נרשום $\varphi(x) \leq M < \infty$ ב-E, ולפי אי-השוויון הקודם

$$0 \leq \int_E \varphi d\mu \leq M\mu(E) = M \cdot 0 = 0$$

ולכן $\int_E \varphi d\mu = 0$.

■

מסקנה 5.6 אם $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \geq 0$ פשוטות ואם $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ קבועים, אזי

$$\int_X \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \int_X \varphi_k d\mu$$

הוכחה. עפ"י סעיף (1) ו-(2) של משפט **5.5** ואינדוקציה. ■

מסקנה 5.7 אם $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$ [16] פונקציה בהצגה כלשהי, אזי

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k)$$

הוכחה. לפי מסקנה **5.6**

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_X I_{E_k} d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_X I_{E_k} d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k)$$

■

מסקנה 5.8 אם $E = \biguplus_{k=1}^{n} E_k$ מדידות ואם $\varphi \geq 0$ פשוטה אז

$$\int_E \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} \varphi d\mu$$

הוכחה. עפ"י סעיף (3) ממשפט **5.5** באינדוקציה. ■

5.3 אינטגרל לבג הכללי לפונקציות חיוביות

הגדרה 5.9 תהי $f : X \to \mathbb{R}$ פונקציה מדידה. אז נגדיר

$$\int_X f d\mu = \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int_X \varphi d\mu$$

כאשר φ פונקציות פשוטות. ה-$\sup$ תמיד מוגדר כמספר ב-$[0, \infty]$. אם $E \subset X$ מדידה יש שתי הגדרות שקולות:

$$\int_E f d\mu = \sup_{0 \leq \varphi(x) \leq f(x) : x \in E} \int_E \varphi d\mu = \int_X f \cdot I_E d\mu$$

נעיר שאם $\varphi \geq 0$ פשוטה, יש לנו שתי הגדרות ל-$\int_X \varphi d\mu$,

1. ההגדרה המקורית $\sum a_k \mu(E_k)$.
2. $\sup_{0 \leq \psi \leq \varphi} \int_X \psi d\mu$ כאשר ψ פשוטה.

הוכחת השקילות מושארת **כתרגיל**.

[16] $a_k \geq 0$.

משפט 5.10 יהיו $f,g:X\to[0,\infty]$ מדידות ו-$c>0$ קבוע. אזי,

1. אם $0\le f\le g$ אזי $0\le\int_X fd\mu\le\int_X gd\mu$.
2. אם $A\subset B\subset X$ מדידות אז
$$\int_A fd\mu\le\int_B fd\mu$$
3. $\int_X c\cdot fd\mu=c\cdot\int_X fd\mu$.
4. אם $f(x)\equiv 0$ ב-$E\in\mathcal{S}$ אז
$$\int_E fd\mu=0$$
אפילו אם $\mu(E)=\infty$.
5. אם $\mu(E)=0$ אז
$$\int_E fd\mu=0$$
אפילו אם $f(x)=+\infty$ ב-E.
6. אם $m\le f(x)\le M$ ב-E אז $m\cdot\mu(E)\le\int_E fd\mu\le M\cdot\mu(E)$ וגם $\int_E cd\mu=c\mu(E)$.

הוכחה.

1. מתקיים
$$\int_X fd\mu=\sup_{0\le\varphi\le f}\int_X\varphi d\mu$$
כאשר φ פשוטות, ולפי המשפט הקודם לכל $\varphi(x)\ge 0$ וממילא $\int f\ge 0$. יתר על כן, אם $0\le f\le g$ אז כל φ כך ש-$\varphi\le f$ מקיימת $\varphi\le g$, ולכן האינטגרל $\int_X gd\mu$ הוא סופרימום של אינטגרלים של יותר פונקציות φ וממילא $\int f\le\int g$.
2. אם $A\subset B$ אז $I_A\le I_B$. לכן עבור $f\ge 0$ מתקיים $fI_A\le fI_B$, ונובע מסעיף א'
$$\int_A fd\mu=\int_X fI_Ad\mu\le\int_X fI_Bd\mu=\int_B fd\mu$$
3. עבור $c>0$, מתקיים
$$\int_X c\cdot fd\mu=\sup_{0\le\varphi\le cf}\int_X\varphi d\mu=\sup_{0\le\frac{1}{c}\varphi\le f}c\int_X\frac{1}{c}\varphi=c\cdot\sup_{0\le\frac{1}{c}\varphi\le f}\int_X\frac{1}{c}\varphi=c\int_X fd\mu$$
כאשר φ פונקציות פשוטות, וקיבלנו את הדרוש.

4. אם $f(x) \equiv 0$ ב-E אז

$$\int_E f d\mu = \int_E 0 d\mu = 0$$

כי "0" פונקציה פשוטה והאינטגרל שלה כבר ידוע.

5. אם $\mu(E) = 0$ אז

$$\int_E f d\mu = \sup_{0 \le \varphi(x) \le f(x) : x \in E} \int_E \varphi d\mu$$

עבור φ פשוטה כבר ידענו שכאשר $\mu(E) = 0$ מתקיים $\int_E \varphi d\mu = 0$, ונובע ש-$\int_E f d\mu = 0$.

6. אם $m \le f(x) \le M$ ב-E אז לפי סעיף (1)

$$\int_E m d\mu \le \int_E f d\mu \le \int_E M d\mu$$

ומכאן,

$$m \cdot \mu(E) \le \int_E f d\mu \le M \cdot \mu(E)$$

וכמו כן, $\int_E c d\mu = \int_X c I_E d\mu = c\mu(E)$.

■

כעת, נוכיח משפט מאוד חשוב בתורת לבג.

משפט 5.11 (משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג) נניח שלכל n מוגדרת ומדידה $f_n : X \to [0, \infty]$, ונניח שלכל $x \in X$

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x) \le \dots$$

אזי מוגדרת ומדידה $f(x) = \sup f_n(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ ומתקיים

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu$$

הוכחה. נגדיר $\alpha = \int_X f d\mu, \beta = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu$. α מוגדר היטב כי $f \ge 0$ ומדידה, ו-β מוגדר היטב כי כאשר ה-f_n עולות עם n, $\int f_n$ עולים עם n ולכן β הוא גבול של סדרה מונוטונית עולה שקיים במובן הרחב.

תחילה נראה ש-$\alpha \le \beta$, אבל כיוון ש-f_n עולות ל-f, לכל n ולכן $x \in X$ מתקיים ש-$f_n(x) \le f(x)$, ולפי משפט **5.10** לכל n

$$\int_X f_n d\mu \le \int f d\mu$$

ומכאן נובע ש-

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \le \int_X f d\mu = \alpha$$

נותר להוכיח ש-$\alpha \le \beta$, אבל

$$\alpha = \int_X f d\mu = \sup_{0\le\varphi\le f} \int_X \varphi d\mu$$

ולכן מספיק להוכיח שאם $0 \le \varphi \le f$[17] אז $\int_X \varphi d\mu \le \beta$. לכן, ניקח φ פשוטה כך שלכל $x \in X$, $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ ונפריד בין שני מקרים.

מקרה 1. $\int_X \varphi d\mu = +\infty$, ונרצה להוכיח ש-$\int_X \varphi = \infty \le \beta$, ז"א $\beta = \infty$. כעת, כיוון ש-$\int_X \varphi d\mu = +\infty$ בהכרח קיימת A מדידה כך ש-$\mu(A) = +\infty$ ולכל $x \in A$, $\varphi(x) \equiv c > 0$, וכיוון ש-$0 \le \varphi \le f$ אז לכל $x \in A$ $f(x) \ge \varphi(x) \ge c$.

לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר

$$A_n = \{x \in A : f_n(x) > \frac{c}{2}\}$$

כיוון שה-f_n עולות, אז $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ וכיוון ש-$f_n(x)$ עולה ל-$f(x) \ge c$ ב-A, אז לכל $x \in A$ קיים איזה n כך ש-$f_n(x) > \frac{c}{2}$, וממילא

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

כיוון שה-A_n עולות מתקיים $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A) = \infty$, כעת לכל n,

$$\beta \ge \int_X f_n d\mu \ge \int_{A_n} f_n d\mu > \int_{A_n} \frac{c}{2} d\mu = \frac{c}{2}\mu(A_n)$$

ונובע ש-$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{2}\mu(A_n) = \frac{c}{2}\infty = \infty \le \beta$, והוכחנו ש-$\int \varphi \le \beta$, ובמקרה $\int \varphi = \infty$, והוכחנו את המקרה הראשון.

מקרה 2. $0 \le \varphi \le f$ ו-$\int_X \varphi < \infty$, ורוצים להוכיח $\int_X \varphi d\mu \le \beta$. ובכן, נגדיר

$$A = \{x \in X : \varphi(x) > 0\}$$

כאשר בגלל ש-$\int_X \varphi d\mu < \infty$ נקבל ש-$\mu(A) < \infty$, ומתקיים

$$\int_X \varphi d\mu = \int_A \varphi d\mu$$

כעת, יהי $\epsilon > 0$ נתון. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר

$$A_n = \{x \in A : f_n(x) > (1-\epsilon)\varphi(x)\}$$

כיוון שה-$\{f_n\}$ עולות, אז $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$. יתר על כן, לכל $x \in A$

$$f(x) \ge \varphi(x) > (1-\epsilon)\varphi(x)$$

[17] וכמובן, φ פשוטה.

ולכן, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$f_n(x) > (1-\epsilon)\varphi(x)$ ולכן $x \in A$. יוצא כמו קודם ש-

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n \implies \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

ולכל n, $A = A_n \uplus (A - A_n)$, ולכן $\mu(A) = \mu(A_n) + \mu(A - A_n)$, וכידוע $\mu(A_n) \le \mu(A) < \infty$ ולכן $\mu(A - A_n) = \mu(A) - \mu(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

נבחר n מסוים כך ש-$\mu(A - A_n) < \epsilon$, ונסמן $M = \max\limits_{x\in X}\varphi(x) < \infty$ <u>ולבסוף:</u>

$$\beta \ge \int_X f_n d\mu \ge \int_{A_n} f_n d\mu \ge \int_{A_n} (1-\epsilon)\varphi d\mu = (1-\epsilon)\int_{A_n} \varphi d\mu = (1-\epsilon)\left[\int_A \varphi d\mu - \int_{A-A_n} \varphi d\mu\right] \ge$$

$$\ge (1-\epsilon)\left[\int_X \varphi d\mu - M\epsilon\right]$$

נשאיף $\epsilon \to 0$ להסיק ש-$\beta \ge \int_X \varphi d\mu$. הדבר נכון לכל $f \ge \varphi$, ולכן $\beta \ge \alpha$. ולכן הוכחנו את הדרוש. ■

משפט 5.12 (למת פאטו) לכל n נניח ש-$f_n : X \to [0,\infty]$ מדידה. נגדיר $g(x) = \underline{\lim} f_n(x)$, אזי $g(x) \ge 0$ ומדידה ומתקיים

$$\int_X g d\mu \le \underline{\lim} \int_X f_n d\mu$$

(במילים אחרות, $\int_X \underline{\lim} f_n d\mu \le \underline{\lim} \int_X f_n d\mu$)

הוכחה. כיוון שכל $f_n(x) \ge 0$, פשוט ש-$g(x) = \underline{\lim} f_n(x) \ge 0$, ו-$g$ מדידה לפי משפט מהפרק הקודם. כידוע,

$$g(x) = \sup_k \inf_{n\ge k} f_n(x)$$

לכל $k \in \mathbb{N}$ נגדיר $g_k(x) = \inf\limits_{n\ge k} f_n(x)$, ולכן $g_k(x) \ge 0$ מדידות ועולות עם k, ולכל k ולכל x, $g_k(x) \le f_k(x)$.
כיוון שה-g_k עולות, משפט **5.11** אומר

$$\int_X g d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k d\mu = \underline{\lim} \int_X g_k d\mu \le \underline{\lim} \int_X f_k d\mu$$

כי כל $g_k \le f_k$. ■

מסקנה 5.13 נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$, הפונקציה $f_n : X \to [0,\infty]$ מדידה, ונניח שקיים

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

אזי מתקיים

$$\int_X f d\mu \le \underline{\lim} \int_X f_n d\mu$$

הוכחה. כאן

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \underline{\lim} f_n(x)$$

ולכן התוצאה מידית מלמת פאטו[18]. ■

הערה. בהרבה ספרים המסקנה נקראית למת פאטו ולא מביאים את משפט **5.12**, שהוא יותר כללי.

דוגמאות. הדוגמאות שלנו יהיו במסגרת הקלאסית של מידת לבג m על $\mathbb{R}$.

1. לכל n נגדיר

$$f_n(x) = I_{[n,\infty)}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq n \\ 0 & x < n \end{cases}$$

ניתן לראות כי לכל n, $f_n : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ מדידה לבג, ה-f_n יורדות עם n, כלומר $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \dots$, ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \equiv 0 = f(x)$$

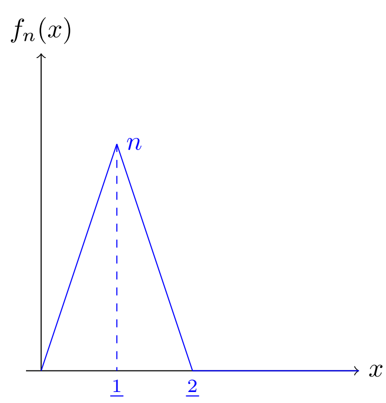
אך

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dm = 0 \neq \infty = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dm$$

מכל מקום, למת פאטו נכונה כאן ולכן

$$\int_{\mathbb{R}} fdm = 0 < \infty = \underline{\lim} \int_{\mathbb{R}} f_n dm$$

2. נגדיר את $f_n(x)$ ע"י הגרף הבא



---

[18] כלומר, משפט **5.12**.

לפיו בכל נקודות הוא 0, פרט למשולש בגובה n שקודקודיו ב-$2/n$ ו-0 (והמרכז ב-$1/n$). גם כאן

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \equiv 0$$

לכל $x \in \mathbb{R}$. נסתמך על זה שאינטגרל לבג שווה לאינטגרל רימן עבור פונקציות רציפות. כעת, לכל n,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n dm = \text{Triangle's Area} = 1$$

ושוב יש אי-שיוויון

$$\int_{\mathbb{R}} f dm = 0 < 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dm$$

משפט 5.14 תהי $f : X \to [0, \infty]$ מדידה. אזי, קיימת סדרה עולה של פונקציות פשוטות

$$0 \le \varphi_1(x) \le \varphi_2(x) \le \dots$$

כך שלכל $x \in X$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

ומתקיים

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n d\mu$$

הוכחה. ניקח $n \in \mathbb{N}$ כלשהו. עבור $1 \le k \le 2^{2\cdot n}$ נגדיר

$$E_{n_k} = \left\{ x \in X : \frac{k-1}{2^n} \le f(x) < \frac{k}{2^n} \right\}$$

ונגדיר

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{2^{2\cdot n}} \frac{k}{2^n} I_{E_{n_k}}(x)$$

בתרגיל הוכיחו שה-$\varphi_n(x)$ עולות עם n לכל $x \in X$, וכי $f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$. עכשיו נובע ממשפט 4 ש-

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n d\mu$$

■

הערה. לכל n,

$$\int_X \varphi_n d\mu = \sum_{k=1}^{2^{2n}} \frac{k}{2^n} \mu(E_{n,k})$$

הם סכומי לבג שהגדרנו בשיעור הראשון, ואמרנו שהם הסכומים המקרבים את $\int_X f d\mu$. עכשיו הוכחנו את זה עבור $f \ge 0$ מדידה.

משפט 5.15 יהיו $f, g : X \to [0, \infty]$ מדידות. אזי,

.1

$$\int_X f d\mu + \int_X g d\mu = \int_X (f+g) d\mu$$

2. אם לכל $n \in \mathbb{N}$ הפונקציה $f_n : X \to [0, \infty]$ מדידה ואם

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

אזי

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

3. אם $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n$ קבוצות מדידות אזי

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$$

4. לכל $E \in \mathcal{S}$ נגדיר $\nu(E) = \int_E f d\mu$. אזי ν מידה על $(X, \mathcal{S})$.

הוכחה.

1. לפי משפט **5.14** קיימות סדרות עולות של פונקציות פשוטות לא שליליות $\{\varphi_n\}$ ו-$\{\psi_n\}$ כך שלכל $x \in X$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x)$$

לכן $f+g$ היא הגבול של סדרה עולה $\varphi_n + \psi_n$, ולפי משפט **5.14** מתקיים:

$$\int_X (f+g) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (\varphi_n + \psi_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \left[\int_X \varphi_n d\mu + \int_X \psi d\mu \right] = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

כאשר השיוויון השני נובע ממשפט **5.5**.

2. נתון $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. לכל N טבעי נגדיר סכום חלקי

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

ע"י אינדוקציה של סעיף 1 נובע שלכל N:

$$\int_X S_N d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int_X f_n d\mu$$

וכיוון שכל $f_n(x) \geq 0$, ה-$S_N(x)$ עולות עם N ולפי הנתון

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x)$$

ולכן לפי משפט **5.11** מתקיים:

$$\int_X f d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_X S_N d\mu = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_X f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

כאשר השלב האחרון נובע מההגדרה של סכום אינסופי.

3. נתון שה-E_n מדידות וזרות בזוגות, והגדרנו $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n$. נובע שלכל $x \in X$,

$$I_E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{E_n}(x)$$

כמו כן

$$f(x) \cdot I_E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x) \cdot I_{E_n}(x)$$

עכשיו נובע מסעיף 2 כי

$$\int_E f d\mu = \int_X f \cdot I_E d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f \cdot I_{E_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$$

4. לכל $E \in \mathcal{S}$ הגדרנו את $\nu(E) = \int_E f d\mu$. ז"א, $\nu : \mathcal{S} \to [0,\infty]$ מוגדרת היטב, ומתקיים ש-$\nu(\emptyset) =$ $\int_\emptyset f d\mu = 0$ (כי $\mu(\emptyset) = 0$), ולפי סעיף ג' אם $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n$ מדידות אז:

$$\nu(E) = \int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$$

■

5.4 כמעט בכל מקום

הגדרה 5.16 יהי $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ממ"ח. אומרים שתכונה P נכונה כמעט בכל מקום[19] ($d\mu$) אם

$$E = \{x \in X : P(x) = \mathsf{false}\}$$

מקיימת $\mu(E) = 0$.

[19]קיצור מקובל הוא כב"מ.

מכאן ואילך נחזור למסגרת של ממ"ח $(X, \mathcal{S}, \mu)$ קבוע, וכל מושג של כב"מ הינו ביחס ל-μ הזו.

משפט 5.17 יהיו $f, g : X \to [0, \infty]$ מדידות. אזי,

1. אם $f(x) = g(x)$ כב"מ אז
$$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$$
2. $\int_X f d\mu = 0 \iff f(x) = 0$ כב"מ.
3. אם $\int_X f d\mu < \infty$ אז $f(x) < \infty$ כב"מ.

הוכחה.

1. נגדיר $E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. לפי הנתון, $\mu(E^C) = 0$. לפי משפט **5.10** מתקיים
$$\int_{E^C} f d\mu = \int_{E^C} g d\mu = 0$$
ומכאן ש-
$$\int_X f d\mu = \int_E f d\mu + \int_{E^C} f d\mu = \int_E f d\mu = \int_E g d\mu = \int_E g d\mu + \int_{E^C} g d\mu = \int_X g d\mu$$
כנדרש.
2. ($\Rightarrow$) אם נתון ש-$f(x) = 0$ כב"מ, אז לפי סעיף 1,
$$\int_X f d\mu = \int_X 0 d\mu = 0$$
($\Leftarrow$) נתון $\int_X f d\mu = 0$. נגדיר את $E = \{x \in X : f(x) > 0\}$. אנו רוצים להוכיח כי $\mu(E) = 0$[20]. לצורך זה, לכל n נגדיר
$$E_n = \left\{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$$
ואז
$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$
ו-$0 \leq \mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, ולכן מספיק להוכיח שלכל n: $\mu(E_n) = 0$. אבל לכל n,
$$0 = \int_X f d\mu \geq \int_{E_n} f d\mu \geq \int_{E_n} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n)$$

[20] כי אם כן $f(x) = 0$ כב"מ

ומכאן שלכל n,

$$0 \le \mu(E_n) \le n \cdot 0 = 0$$

ולכן $\mu(E_n) = 0$ ומכאן ש-

$$0 \le \mu(E) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

והוכחנו $\mu(E) = 0$, ולכן $f(x) = 0$ כב"מ.

3. נתון $\int_X fd\mu < \infty$. נגדיר $E = \{x \in X : f(x) = \infty\}$. נניח בשלילה ש-$\mu(E) > 0$. אז לפי הנתון, לכל $M > 0$ מתקיים

$$f(x) \ge M \cdot I_E(x)$$

ולכן

$$\infty > \int_X fd\mu \ge \int_X M \cdot I_E(x) d\mu = M \cdot \mu(E)$$

ז"א, לכל $M > 0$,

$$0 \le \mu(E) \le \frac{1}{M} \int_X fd\mu$$

נשאיף $M \to \infty$ להסיק ש-$\mu(E) = 0$.

$\blacksquare$

מסקנה. מסעיף 2 של משפט **5.14**, נובע שאם $\mu(E) > 0$ ואם $f(x) > 0$ על E אז $\int_E fd\mu > 0$.

הגדרה 5.18 יהי $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ממ"ח. μ נקראית **מידה שלמה** אם לכל $E \in \mathcal{S}$ כך ש-$\mu(E) = 0$ כל תת קבוצה של E שייכת ל-$\mathcal{S}$.

דוגמאות.

1. מידת לבג על $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ היא מידה שלמה. הסיבה היא שאם $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ מקיימת $m(E) = 0$ אז לכל $F \subset E$

$$0 \le m^*(F) \le m^*(E) = m(E) = 0$$

ז"א $m^*(F) = 0$, ולפי משפט מתחילת הקורס $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

2. מידת לבג m_n על $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ שלמה מאותה סיבה כמו m על $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

3. הצמצום של מידת לבג m לאלגברת בורל $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ היא מידה לא שלמה.

משפט 5.19 יהי $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ממ"ח, ונניח ש-μ מידה שלמה על $\mathcal{S}$. עוד נניח ש-$f : X \to \mathbb{R}^*$ מדידה ו-$g : X \to \mathbb{R}^*$ מקיימת $f(x) = g(x)$ כב"מ ($d\mu$). אזי g מדידה $\mathcal{S}$.

ההוכחה מושארת כתרגיל.

לאור המושגים הנ"ל, אפשר לשפר במעט את המשפטים שלנו. למשל, משפט **5.11** נכון בהכללה הבאה:

משפט 5.11 המוכלל לכל n נניח ש-$f_n : X \to [0,\infty]$ מדידה, עוד נניח שלכמעט כל x ($d\mu$)

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \dots$$

ו-$f : X \to [0,\infty]$ מדידה ומקיימת $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ כב"מ. אזי,

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

ואם μ מידה שלמה, אין צורך להניח ש-f מדידה, כיוון ש-$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ כב"מ, f מדידה אוטומטית. **הוכחה.** נגדיר את E להיות הקבוצה היוצאת מן הכלל, שבה $f_n(x)$ לא עולה עם n או שבה

$$f(x) \ne \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

לפי הנתון, $\mu(E) = 0$, על E^C התנאים של משפט **5.11** מתקיימים. לכן נוכל להסיק:

$$\int_X f d\mu = \int_{E^C} f d\mu + \int_E f d\mu = \int_{E^C} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E^C} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

ואם μ מידה שלמה נגדיר לכל $x \in X$ את $g(x) = \overline{\lim} f_n(x)$. כיוון שכל f_n מדידה, g מדידה על E^C,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \overline{\lim} f_n(x) = g(x)$$

ז"א, $f(x) = g(x)$ כב"מ ($d\mu$). כיוון ש-g מדידה ו-μ שלמה משפט **5.19** אומר ש-f מדידה. ■

משפט 5.12 המוכלל נניח שלכל n מתקיים כי $f_n : X \to [0,\infty]$ מדידה ונניח שקיים $f : X \to [0,\infty]$ מדידה כך שכב"מ

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

אז

$$\int_X f d\mu \le \underline{\lim} \int_X f d\mu$$

ואם μ מידה שלמה אז f פונקציה מדידה באופן אוטומטי.

מסקנות נוספות ממשפט 5.19. כבר ציינו שאם $f, g : X \to \mathbb{R}^*$ אז יש בעיה להגדיר $f+g$ בנקודות שבהן $f(x) = +\infty$ ו-$g(x) = -\infty$ או להיפך ויש בעיה להגדיר $f(x)g(x)$ במצב של $\pm\infty \cdot 0$. אבל אם μ מידה שלמה ואם ידוע ש-$|f(x)| < \infty$ כב"מ וגם $|g(x)| < \infty$ כב"מ אז הפונקציות $f \pm g$ ו-fg יהיו מדידות באופן ב"ת בהגדרתן בנקודות הבעייתיות.

5.5 אינטגרל לבג הכללי

עדיין אנחנו עוסקים בממ"ח קבוע $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ועכשיו נעיין בפונקציות $f : X \to \mathbb{R}^*$. תחילה, נגדיר

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \ge 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases} = \max(f(x), 0)$$

ונגדיר

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & f(x) > 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases} = \max(0, -f(x))$$

כעת, אם f מדידה אז f^+ ו-f^- מדידות ולפי עצם ההגדרה $f^+, f^- \geq 0$. לכל $x \in X$, $f(x) = f^+ - f^-(x)$, ו-$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

הגדרה 5.20 תהי $f : X \to \mathbb{R}^*$ פונקציה כלשהי. נאמר ש-f אינטגרבילית $d\mu$ אם f מדידה $\mathcal{S}$ ואם

$$\int_X f^+ d\mu < \infty$$

וגם

$$\int_X f^- d\mu < \infty$$

ואם כן מגדירים

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

לפי זה גם פונקציה מדידה $f : X \to [0, \infty[$ נקראית אינטגרבילית $d\mu$ אם $\int_X f d\mu < \infty$.

משפט 5.21 תהי $f : X \to \mathbb{R}^*$ מדידה. אז f אינטגרבילית $\iff$ $|f|$ אינטגרבילית, ואם כן

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$$

הוכחה. ($\Leftarrow$) תחילה נניח ש-f אינטגרבילית. ז"א, $\int f^+ d\mu < \infty$ וגם $\int f^- d\mu < \infty$, וכיוון ש-f^+ ו-f^- לא שליליות, נובע ממשפט **5.15** ש-

$$\int_X |f| d\mu = \int_X (f^+ + f^-) d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < \infty$$

ולכן $|f|$ אינטגרבילית.

($\Rightarrow$) אם נתון ש-$|f|$ אינטגרבילית, נשים לב שלכל $x \in X$ מתקיים ש-$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ ולכן $0 \leq f^+(x) \leq |f(x)|$ ולכן נובע ממשפט **5.12** ש-

$$\int_X f^+ d\mu \leq \int_X |f| d\mu < \infty$$

וכמו כן

$$\int_X f^- d\mu \leq \int_X |f| d\mu < \infty$$

והוכחנו כבר ש-f אינטגרבילית. לגבי אי-השיוויון

$$\left| \int_X f d\mu \right| = \left| \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right| \leq \left| \int_X f^+ d\mu \right| + \left| \int_X f^- d\mu \right|$$

אבל הכל חיובי, ולכן אפשר להוריד את הערך המוחלט, ומכאן נסיק ש-

$$\left|\int_X fd\mu\right| \leq \int_X f^+d\mu + \int_X f^-d\mu = \int_X |f|d\mu$$

■

נעיר שאם $E \subset X$ מדידה, אפשר להגדיר את $\int_E fd\mu$ ע"י

$$\int_E f^+d\mu - \int_E f^-d\mu$$

או באופן שקול ע"י $\int_X f \cdot I_E d\mu$.

משפט 5.22 נניח ש-$f, g : X \to \mathbb{R}^*$ פונקציות אינטגרביליות, ו-$c \in \mathbb{R}$ קבוע. אזי,

1. אם $h : X \to \mathbb{R}^*$ מדידה ואם $|h(x)| \leq |f(x)|$ לכל $x \in X$, אזי h אינטגרבילית.
2. f אינטגרבילית על כל תת קבוצה מדידה $E \subset X$ ואם $E = A \uplus B$ (A ו-B מדידות וזרות) אז
$$\int_E fd\mu = \int_A fd\mu + \int_B fd\mu$$
3. $\mu \{x \in X : |f(x)| = \infty\} = 0$.
4. אם E מדידה ואם $\mu(E) = 0$ אז $\int_E fd\mu = 0$.
5. cf אינטגרבילית ו-
$$\int_X cfd\mu = c\int_X fd\mu$$
6. $f + g$ אינטגרבילית ומתקיים
$$\int_X (f+g)d\mu = \int_X fd\mu + \int_X gd\mu$$
7. אם $f_1, \ldots, f_n$ אינטגרביליות ואם $c_1, \ldots, c_n$ קבועים אז $\sum_{k=1}^n c_k f_k$ אינטגרבילית ומתקיים:
$$\int_X \left(\sum_{k=1}^n c_k f_k\right) d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \int_X f_k d\mu$$
8. אם לכל $x \in X$ $f(x) \leq g(x)$ אזי
$$\int_X fd\mu \leq \int_X gd\mu$$

הוכחה.

1. $|f|$ ו-$|h|$ פונקציות לא שליליות, ועבורן ידוע ממשפט **5.10** ש-

$$\int_X |h| d\mu \leq \int_X |f| d\mu < \infty$$

כי f אינטגרבילית. לפי משפט **5.21** h אינטגרבילית.

2. אם $E \subset X$ מדידה אז לכל $x \in X$,

$$|f(x) I_E(x)| \leq |f(x)|$$

ולפי סעיף 1, fI_E אינטגרבילית, ז"א f אינטגרבילית על E. יתר על כן, אם $E = A \uplus B$ אז f אינט' ב-A וב-B כנ"ל ולפי משפט **5.10**

$$\int_E f^+ d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_B f^+ d\mu$$

כמו כן,

$$\int_E f^- d\mu = \int_A f^- d\mu + \int_B f^- d\mu$$

וכיוון ש-f אינטגרבילית כל האינטגרלים האלה סופיים, ואפשר להחסיר נוסחאות להסיק:

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \int_A f^+ - \int_A f^- + \int_B f^+ - \int_B f^- = \int_A f + \int_B f$$

3. כיוון ש-f אינטגרבילית בפרט $\int_X f^+ d\mu < \infty$, ונובע ממשפט **5.17** ש-

$$\mu\{x \in X : f^+(x) = \infty\} = 0$$

ז"א, $\mu\{x \in X : f(x) = +\infty\} = 0$. כמו כן, $\int_X f^- d\mu < \infty$ ונובע כנ"ל ש-

$$\mu\{x \in X : f(x) = -\infty\} = 0$$

ומכל זה נובע ש-

$$\mu\{x \in X : |f(x)| = \infty\} = 0$$

4. אם $\mu(E) = 0$ נובע ממשפט **5.10** ש-

$$\int_E f^+ d\mu = \int_E f^- d\mu = 0$$

ולכן

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu = 0$$

5. cf אינטגרבילית כי היא מדידה ומתקיים

$$\int_X |cf|d\mu = |c|\int_X |f|d\mu < \infty$$

ולכן עפ"י סעיף א' cf אינטגרבילית. כעת אם $c > 0$,

$$(cf)^+ = cf^+, (cf)^- = cf^-$$

ולכן עפ"י משפט **5.10** מתקיים,

$$\int_X cfd\mu = \int_X (cf)^+d\mu - \int_X (cf)^-d\mu = \int_X cf^+d\mu - \int_X cf^-d\mu = c\int_X f^+d\mu - c\int_X f^-d\mu =$$

$$= c\left[\int_X f^+d\mu - \int_X f^-d\mu\right] = c\int_X fd\mu$$

ואם $c < 0$ הרי $-c > 0$ ומתקיים $(cf)^+ = -cf^-, (cf)^- = -cf^+$.
בדיקה במעבדה. אם $f(x) > 0$ אז $f^+(x) = f(x), f^-(x) = 0$, וכיוון ש-$c < 0$, אז $cf(x) < 0$, ולכן,

$$(cf)^+(x) = 0 = -cf^-(x)$$

$$(cf)^-(x) = -cf(x) = -cf^+(x)$$

ולכן לפי זה,

$$\int_X cf = \int_X (cf)^+ - \int_X (cf)^- = \int_X -cf^- - \int_X -cf^+$$

וכיוון ש-$-c > 0$ משפט **5.10** אומר שזה שווה ל-

$$-c\int_X f^- + c\int_X f^+ = c\left[\int_X f^+ - \int_X f^-\right] = c\int_X f$$

ובכך סיימנו.

6. $f + g$ אינטגרבילית כי

$$\int_X |f+g|d\mu \le \int_X |f|d\mu + \int_X |g|d\mu < \infty$$

אמנם $f + g$ לא מוגדרת היטב במצב של $\infty - \infty$ אבל לפי סעיף ג' הנקודות האלה מהוות קבוצה בעלת מידה אפס. אז נוכל לכתוב

$$X = E \uplus E^C$$

כאשר

$$E^C = \{x \in X : |f(x)| + |g(x)| = \infty|$$

ו-$\mu(E^C) = 0$ ועל E $f(x)$ ו-$g(x)$ מקבלות ערכים סופיים. כעת, לכל $x \in E$,

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-)$$

וכולם מספרים סופיים, ולכן אפשר להעביר אגף לומר ש-

$$(f+g)^{+}+f^{-}+g^{-}=f^{+}+g^{+}+(f+g)^{-}$$

כל הפונקציות הנ"ל לא שליליות, ונובע ממשפט **5.15** ש-

$$\int_E (f+g)^{+}+\int_E f^{-}+\int_E g^{-}=\int_E f^{+}+\int_E g^{+}+\int_E (f+g)^{-}$$

וכיוון ש-$f,g,f+g$ כולן אינטגרביליות, כל האינטגרלים כאן מספרים סופיים, ואפשר להעביר אגף:

$$\int_E (f+g)^{+}-\int_E (f+g)^{-}=\int_E f^{+}-\int_E f^{-}+\int_E g^{+}-\int_E g^{-}$$

ז"א,

$$\int_E f+g=\int_E f+\int_E g$$

וכיוון ש-$\mu(E^C)=0$ בעצם הוכחנו

$$\int_X f+g=\int_X f+\int_X g$$

7. נובע מסעיף 5,6 באינדוקציה.
8. אם $f\leq g$ הרי $g=(g-f)+f$ ו-$g-f\geq 0$, ולפי סעיף 6,

$$\int g=\int (g-f)+\int f$$

ז"א, $\int g\geq\int f$.

■

הכללות.

1. בסעיף 2 אפשר להכליל כך. אם $E=\biguplus_{n=1}^{\infty}E_n$ כל E_n מדידה ואז

$$\int_E f d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f d\mu$$

כי לפי משפט **5.15**

$$\int_E f^{+}d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f^{+}d\mu$$

וגם

$$\int_E f^{-}d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f^{-}d\mu$$

נחסיר נוסחאות לקבל את התוצאה.

2. בכל הסעיפים מספיק שהתנאים יתקיימו כב"מ $d\mu$, אם ידוע שהפונקציות מדידות.

משפט 5.23 (משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג) יהיו $f_n : X \to \mathbb{R}^*$ פונקציות מדידות ונניח שלכל $x \in X$ קיים הגבול

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

עוד נניח שקיימת פונקציה אינטגרבילית $g : X \to [0, \infty]$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$. אזי כל f_n וגם f אינטגרבילית ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

הוכחה. כיוון שלכל n ולכל x מתקיים ש-$|f_n(x)| \leq g(x)$ ו-g אינטגרבילית, סעיף 1 של משפט **5.22** נותן שכל f_n אינטגרבילית. לכל $x \in X$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

ולכן גם מתקיים

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq g(x)$$

ולכן f אינטגרבילית. הנתון $|f_n(x)| \leq g(x)$ אומר שלכל $x \in X$,

$$-g(x) \leq f_n(x) \leq g(x)$$

ומכאן שלכל $x \in X$, $f_n(x) + g(x) \geq 0$ ושואף ל-$f(x) + g(x)$. לפי למת פאטו,

$$\int_X (f+g)d\mu \leq \underline{\lim} \int_X (f_n + g)d\mu$$

וזה **שקול** ל-

$$\int_X f + \int_X g \leq \underline{\lim} \int_X f_n + \int_X g$$

וכיוון ש-g אינטגרבילית, מותר להעביר אגף לומר

$$\int_X f \leq \underline{\lim} \int_X f_n$$

בהמשך ההוכחה נסתמך על העובדה שאם $\{a_n\}$ סדרה ממשית אז $\underline{\lim}(-a_n) = -\overline{\lim} a_n$.

ובכן, לפי הנתון לכל $x \in X$, מתקיים ש-$f_n(x) \leq g(x)$ ולכן $g(x) - f_n(x) \geq 0$ ושואף ל-$g(x) - f(x)$. שוב לפי למת פאטו,

$$\int_X (g-f)d\mu \leq \underline{\lim} \int_X (g - f_n)d\mu$$

כיוון ש-f,g ו-f_n אינטגרביליות, נובע ממשפט **5.22** סעיף 7,

$$\int_X gd\mu - \int_X fd\mu \leq \underline{\lim}\left(\int_X g - \int_X f_n\right)$$

ז"א,

$$\int_X gd\mu - \int_X fd\mu \leq \int_X gd\mu + \underline{\lim} - \int_X f_n d\mu = -\overline{\lim}\int_X f_n d\mu \implies \overline{\lim}\int_X f_n d\mu \leq \int_X fd\mu$$

ובסיכום הוכחנו,

$$\int_X fd\mu \leq \underline{\lim}\int_X f_n d\mu \leq \overline{\lim}\int_X f_n d\mu \leq \int_X fd\mu$$

הדבר ייתכן רק אם כל אי-שיוויון הוא בעצם שיוויון. לכן,

$$\underline{\lim}\int f_n = \overline{\lim}\int f_n$$

וקיים $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n$ קיים ושווה ל-$\int_X fd\mu$. ■

משפט 5.24 (משפט ההתכנסות החסומה) נניח ש-$E \subset X$ מדידה ו-$\mu(E) < \infty$. עוד נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$ מוגדרת פונקציה מדידה $f_n : E \to \mathbb{R}$ וקיים $M > 0$ כך שלכל n ולכל $x \in E$, $|f_n(x)| \leq M$ ולכל $x \in E$ קיים $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. אזי,

$$\int_E fd\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu$$

הוכחה. לכל $x \in E$ נגדיר $g(x) = M$. אז $g(x) \geq 0$ מדידה והיא גם אינטגרבילית כי

$$\int_E gd\mu = \int_E Md\mu = M \cdot \mu(E) < \infty$$

כיוון שלכל x ולכל n, $|f_n(x)| \leq M = g(x)$, יש כאן את כל התנאים של משפט **5.23** ונוכל להסיק ש-

$$\int_E fd\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu$$

■

אפשר לשפר את משפטים **5.23** ו-**5.24** מספיק להניח שכל התנאים מתקיימים כב"מ אם ידוע שהפונקציות כולן מדידות.

חלק III

הכללות לבג לתורת רימן

לאורך כל פרק זה, m היא מידת לבג על $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. הרבה פעמים נכתוב $\int_a^b fdm$ במקום $\int_{[a,b]} fdm$.

6 משפט הגזירה של לבג

המשפט הראשון בפרק הוא משפט הגזירה של לבג, האומר בין היתר שאם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מונוטונית אזי $f'(x)$ קיימת כב"מ (dm).

אחד המכשירים להוכחת משפט זה הוא למת ויטלי, שהיא למה **קומבינטורית**.

כמוטיבציה ללמה, נביא **תרגיל**. נניח ש-$E\subset\mathbb{R}$ מקיימת $m^*(E)=s<\infty$ ו-$\epsilon>0$ נתון. אזי קיימית קטעים פתוחים זרים בזוגות $I_1,\ldots,I_n$ כך שאם $S=\bigcup_{m=1}^{n}I_m$ אז

$$m(S)<s+\epsilon, m^*(E-S)<\epsilon$$

ז"א, S כמעט מכסה את E. **הוכחה.** לפי הגדרת m^* יש קבוצה פתוחה $E\subset O$ כך ש-$m(O)<s+\epsilon$. נוכל לכתוב

$$O=\biguplus_{m=1}^{\infty}I_m$$

כאשר ה-I_m-קטעים זרים בזוגות. נבחר n טבעי כך ש-

$$\sum_{m=1}^{n}|I_m|>s$$

וממילא $\sum_{m=n+1}^{\infty}|I_m|<\epsilon$, ונגדיר

$$S=\biguplus_{m=1}^{\infty}I_m$$

כעת, $E\subset O=S\cup\bigcup_{m=n+1}^{\infty}I_m$ ולכן $E-S\subset\bigcup_{m=n+1}^{\infty}I_m$ ומתקיים

$$m^*(E-S)\le m^*\left[\bigcup_{m=n+1}^{\infty}I_m\right]<\epsilon$$

■

6.1 למת ויטלי

הגדרה 6.1 תהי $E\subset\mathbb{R}$ קבוצה כלשהי, ותהי $\mathcal{F}$ משפחה של קטעים. נאמר ש-$\mathcal{F}$ מכסה את E במובן של *ויטלי* אם לכל $x\in E$ ולכל $\epsilon>0$ קיים קטע $I\in\mathcal{F}$ כך ש-$x\in I$ ו-$|I|<\epsilon$. *במילים*, $\mathcal{F}$ מכילה קטעים קטנים כרצוננו סביב כל נקודה.

למת ויטלי. נניח ש-$E\subset\mathbb{R}$ קבוצה המקיימת $m^*(E)<\infty$, ונניח ש-$\mathcal{F}$ משפחה של קטעים שמכסה את E במובן של ויטלי. אזי לכל $\epsilon>0$ קיים מספר סופי של קטעים זרים בזוגות מ-$\mathcal{F}$ כך ש-$I_1,\ldots,I_n$ כך ש-

$$m^*\left(E\backslash\biguplus_{k=1}^{\infty}I_k\right)<\epsilon$$

ז"א, E **"כמעט"** שווה לאיחוד זר של קטעים מ-$\mathcal{F}$.

הדרך להוכיח את משפט הגזירה של לבג היא להראות שלכמעט כל x,

$$\underline{\lim}_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\overline{\lim}_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

תזכורת. אם $g(x)$ פונקציה מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 אז מגדירים

$$\underline{\lim}_{x\to x_0} g(x)=\sup_{\delta>0}\inf_{0<|x-x_0|<\delta} g(x)$$

שזה המינימום של גבולות $\lim_{n\to\infty} g(x_n)$ עבור סדרות $x_0 \neq x_n \to x_0$.

$$\overline{\lim}_{x\to x_0} g(x)=\inf_{\delta>0}\sup_{0<|x-x_0|<\delta} g(x)$$

שזה המקסימום של גבולות $\lim_{n\to\infty} g(x_n)$ כאשר $x_0 \neq x_n \to x_0$. כעת, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ קיים $\iff$ $\underline{\lim}_{x\to x_0} g(x) = \overline{\lim}_{x\to x_0} g(x)$.

דוגמא. $g(x)=\sin(\frac{1}{x})$.

$$\lim_{x\to 0} g(x)$$

אינו קיים, אבל $\overline{\lim}_{x\to 0} g(x)=1$, $\underline{\lim}_{x\to 0} g(x)=-1$.

מסקנה 6.2 בנתונים של למת ויטלי, אם $m^*(E)=s<\infty$ אז לכל $\epsilon>0$ יש מספר סופי של קטעים $I_1,\ldots,I_n$ זרים בזוגות מ-$\mathcal{F}$ כך שאם

$$K=\biguplus_{k=1}^{\infty} I_k$$

אז $m^*(E\cap K)>s-\epsilon$ ו-$m(K)<s+\epsilon$.

הוכחה. לפי הגדרת m^*, קיימת קבוצה פתוחה $\mathcal{O}$ כך ש-$E\subset\mathcal{O}$ ו-$m(\mathcal{O})<s+\epsilon$. נגדיר את $\mathcal{F}_1$ להיות משפחת כל הקטעים ב-$\mathcal{F}$ שמוכלים ב-$\mathcal{O}$. אם $\mathcal{F}_1$ מהווה כיסוי ויטלי של E, אך $\mathcal{F}_1$ מהווה כיסוי ויטלי של E ולכן עפ"י למת ויטלי יש לנו קטעים זרים בזוגות $I_1,\ldots,I_n$ ב-$\mathcal{F}_1$ כך שעבור

$$K=\biguplus_{\ell=1}^{n} I_\ell$$

$$m^*(E\backslash K)<\epsilon$$

לפי הבנייה של כל $I_\ell\subset\mathcal{O}$ ולכן $K\subset\mathcal{O}$ ויוצא ש-$s+\epsilon>m(\mathcal{O})\geq m(K)$. ■

למה 6.3 תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ אינטגרבילית לבג, ויהי $c>0$ קבוע. אזי לכל $a<b\in\mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x+c)dm=\int_{a+c}^{b+c} f(x)dm$$

הוכחה. תחילה ניקח $E \subset \mathbb{R}$ מדידה ונבדוק את הלמה עבור $f(x) = I_E(x)$. לפי זה,

$$\int_a^b f(x+c)dm = \int_a^b I_E(x+c)dm$$

אבל,

$$I_E(x+c) = \begin{cases} 1 & x \in E-c \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

ולכן:

$$\int_a^b I_E(x+c)dm = \int_a^b I_{E-c}dm = m(E-c \cap [a,b])$$

וכיוון ש-m שמורה תחת הזזה, זה שווה ל-

$$= m(E \cap [a+c, b+c]) = \int_{a+c}^{b+c} I_E(x)dm$$

כיוון שהלמה נכונה לכל I_E היא גם נכונה לכל פונקציה פשוטה. ואם $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ מדידה היא גבול של סדרה עולה של פונקציות פשוטות והלמה נובעת מהשלב הקודם עם התכנסות מונוטונית. ואם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ אינטגרבילית אז $f = f^+ - f^-$ והלמה נובעת מהשלב הקודם. ∎

משפט 6.4 (משפט הגזירה של לבג) תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה עולה. אזי f גזירה כב"מ (dm). $f'(x) \geq 0$ כב"מ ומתקיים

$$\int_a^b f'dm \leq f(b) - f(a)$$

הוכחה. תחילה נרחיב את f לפונקציה עולה על כל $\mathbb{R}$ ע"י

$$f(x) = f(a) : x < a$$
$$f(x) = f(b) : x > b$$

נגדיר את הקבוצה הבאה,

$$E = \left\{ x \in [a,b] : \varliminf_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < \varlimsup_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\}$$

נוכיח כי $m^*(E) = 0$.

מתקיים כי

$$E = \bigcup_{\alpha < \beta \in \mathbb{Q}} E_{\alpha\beta}$$

כאשר $E_{\alpha\beta}=\left\{x\in[a,b]:\varliminf_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}<\alpha<\beta<\varlimsup_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}$. נסמן $m^*(E_{\alpha\beta})=s\le b-a$.
נעיר שאם $x\in E_{\alpha\beta}$ אז קיימת סדרה $h_n\to0$ כך שלכל n:

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}<\alpha$$

ז"א, לכל $x\in E_{\alpha\beta}$ יש קטעים מהסוג $[x,x+h_n]$ או $[x+h_n,x]$[21] קטנים כרצוננו כך ש-$\alpha>\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$.
קטעים אלה מהווים **כיסוי ויטלי** של $E_{\alpha\beta}$. לפי המסקנה ללמת ויטלי, נוכל לבחור מספר סופי של קטעים מסוג זה

$$[x_n,y_n]\ \ n=1,2\dots,N$$

שזרים בזוגות, כך שלכל n מתקיים $\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}<\alpha$, ואם $K=\biguplus_{n=1}^N[x_n,y_n]$ אז

$$m^*(K)<s+\epsilon$$
$$m^*(E_{\alpha\beta}\cap K)>s-\epsilon$$

לפי כל זה בפרט מתקיים:

$$\sum_{n=1}^N f(x_n)-f(y_n)<\sum_{n=1}^N\alpha[y_n-x_n]<\alpha m(K)<\alpha(s+\epsilon)$$

כעת ניקח $x\in E_{\alpha\beta}\cap K$. אז קיים n כך ש-$x\in[x_n,y_n]$ ואם x לא בקצה של קטע זה אז יש h מספרים קטנים כרצוננו כך שהקטע $[x,x+h]$, $[x+h,,x]$ כולו בתוך $[x_n,y_n]$ ומתקיים $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>\beta$. קטעים אלה מהווים כיסוי ויטלי של K (פחות הקצוות) ולכן עפ"י למת ויטלי נוכל לבחור מספר סופי של קטעים זרים

$$J_\ell=[w_\ell,z_\ell]\ \ \ell=1,2,\dots,m$$

כך שלכל ℓ יש איזה n כך ש-$J_\ell\subset[x_n,y_n]\equiv I_n$ ו-$\frac{f(z_\ell)-f(w_\ell)}{z_\ell-w_\ell}>\beta$ וה-J_ℓ מכסים תת קבוצה של K שמידתה גדולה מ-$s-2\epsilon$. כעת, עבור כל $n=1,2,\dots,N$

$$\sum_{J_\ell\subset I_n}f(z_\ell)-f(w_\ell)>\sum_{J_\ell\subset I_n}\beta(z_\ell-w_\ell)$$

אבל

$$f(y_n)-f(x_n)\ge\sum_{J_\ell\subset I_n}f(z_\ell)-f(w_\ell)$$

כי f עולה. לבסוף

$$\alpha(s+\epsilon)>\sum_{n=1}^N f(y_m)-f(x_n)\ge\sum_{n=1}^N\sum_{J_\ell\subset I_n}f(z_\ell)-f(w_\ell)>\sum_{n=1}^N\sum_{J_\ell\subset I_n}\beta(z_\ell-w_\ell)=$$

$$=\sum_{\ell=1}^m\beta(z_\ell-w_\ell)>\beta(s-2\epsilon)$$

[21] אם $h_n<0$.

הדבר אפשרי לכל $\epsilon > 0$. לכן נשאיף $\epsilon \to 0$ להסיק

$$\alpha s \geq \beta s$$

וכיוון שנתון $\alpha < \beta$ אי-השיוויון אפשרי רק אם $s = 0$. והוכחנו ש-$m^*(E_{\alpha\beta}) = 0$ לכל $a < \beta \in \mathbb{Q}$, וכיוון ש-

$$E = \bigcup_{\alpha < \beta \in \mathbb{Q}} E_{\alpha\beta}$$

ולכן $m^*(E) = 0$ והוכחנו את הטענה. כעת, עבור $n \in \mathbb{N}$ נגדיר לכל $x \in [a, b]$

$$g_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

כיוון ש-f מונוטונית היא מדידה לבג, ומכאן כל g_n מדידה לבג. $g_n(x) \geq 0$ לכל n ו-x, ולכל $x \in E^C$ קיים

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) \in [0, \infty]$$

ולכל x כך ש-$g(x) < \infty$ אז $f'(x)$ קיים ושווה $g(x)$. בפרט $g_n \to g$ כב"מ ולפי למת פאטו:

$$\int_a^b gdm \leq \underline{\lim} \int_a^b g_n dm = \underline{\lim}\, n \int_a^b \left[f(x + \frac{1}{n}) - f(x) \right] dm = \underline{\lim} n \left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} fdm - \int_a^b fdm \right] =$$

$$= \underline{\lim} n \left[\int_b^{b+\frac{1}{n}} fdm - \int_a^{a+\frac{1}{n}} fdm \right]$$

כעת, לפי ההגדרה בקטע $[b, b + \frac{1}{n}]$, $f(x) \equiv f(b)$, ולכן עבור כל n,

$$n \int_b^{b+\frac{1}{n}} fdm = f(b)$$

וכיוון ש-f עולה בקטע $[a, a + \frac{1}{n}]$, אז $f(x) \geq f(a)$, ולכן

$$n \int_a^{a+\frac{1}{n}} fdm \geq n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(a)dm = f(a)$$

ולכן יוצא ש**לכל** n:

$$n \left[\int_b^{b+\frac{1}{n}} fdm - \int_a^{a+\frac{1}{n}} fdm \right] \leq f(b) - f(a)$$

ומכל זה נובע

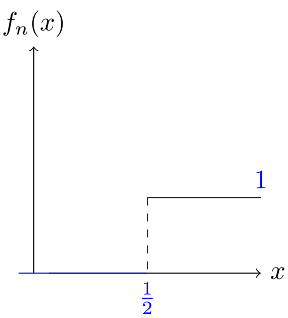
$$\int_a^b gdm \leq f(b) - f(a)$$

ולכן $\int_a^b gdm < \infty$, ולכן $g(x) < \infty$ כב"מ, ובפרט $f'(x)$ קיים כב"מ ושווה $g(x)$ ולכן f' קיים כב"מ ומתקיים

$$\int_a^b f'dm = \int_a^b gdm \leq f(b) - f(a)$$

ולכן הוכחנו את הדרוש. ■

דוגמא. נגדיר את הפונקציה הבאה:



f עולה ב-$[0,1]$, וכב"מ $f'(x) = 0$, ומתקיים

$$f(1) - f(0) = 1 > 0 = \int_0^1 f'dm$$

אם f היא מונוטונית ולא רציפה, אז **תמיד**

$$\int_a^b f'dm < f(b) - f(a)$$

מסקנה 6.5 אם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ מקיימת $f(x) = g(x) - h(x)$ כאשר g ו-h עולות ב-$[a,b]$ אז $f'(x)$ קיימת כב"מ ב-$[a,b]$.

מסקנה 6.6 נניח ש-$f(x)$ מוגדרת ואינטגרבילית ב-$[a,b]$ ולכל $x \in [a,b]$ נגדיר

$$F(x) = \int_a^x fdm$$

אזי $F'(x)$ קיימת כב"מ ב-$[a,b]$.

הוכחה. לכל $x \in [a,b]$ נגדיר:

$$G(x) = \int_a^x f^+dm$$

$$H(x) = \int_a^x f^-dm$$

כיוון שלכל $x \in [a,b]$, $f^+(x), f^-(x) \geq 0$, $G(x)$ ו-$H(x)$ עולות ב-$[a,b]$. לבסוף,

$$G(x) - H(x) = \int_a^x [f^+ - f^-]dm = \int_a^x f dm = F(x)$$

ומצאנו ש-$F(x)$ היא הפרש של שתי פונקציות עולות והיא גזירה כב"מ ולפי מסקנה **6.5**. ∎

7 הכללת המשפט היסודי

תזכורת. החלק הראשון של המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי בחלק הראשון אומר: תהי $f(x)$ מוגדרת ואינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$. לכל $x \in [a,b]$ נגדיר

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

אזי $F(x)$ רציפה ב-$[a,b]$ ובכל x_0 שבו f רציפה, F' גזירה ומתקיים $F'(x_0) = f(x_0)$.

הכללת לבג. תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}^*$ מוגדרת ואינטגרבילית לבג. נגדיר לכל $x \in [a,b]$

$$F(x) = \int_a^x f dm$$

אזי F רציפה בהחלט[22] ב-$[a,b]$ וכב"מ $F'(x)$ קיים ושווה $f(x)$.

כדי להוכיח את הרציפות בהחלט של F, נסתמך על משפט כללי בתורת לבג.

משפט 7.1 יהי $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ממ"ח ותהי $f : X \to \mathbb{R}^*$ אינטגרבילית $d\mu$. אזי לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $E \in \mathcal{S}$ ואם $\mu(E) < \delta$ מתקיים

$$\int_E |f| d\mu < \epsilon$$

הוכחה. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $f_n : X \to \mathbb{R}$ ע"י

$$f_n(x) = \begin{cases} |f(x)| & |f(x)| \leq n \\ n & |f(x)| > n \end{cases} = \min(n, |f(x)|)$$

לפי זה לכל $x \in X$ $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ וכל f_n מדידה.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = |f(x)|$$

ולפי התכנסות מונוטונית:

$$\int_X |f| d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

[22] יוגדר בהמשך.

כעת, יהי $\epsilon > 0$ נתון. נוכל לבחור n מסויים כך ש-$f_n(x) \leq |f(x)|$ ו-

$$\int_X (|f| - f_n) d\mu < \frac{\epsilon}{2}$$

וכעת, אם $E \in \mathcal{S}$ מקיימת $\mu(E) < \frac{\epsilon}{2n}$ אז:

$$\int_E |f| d\mu = \int_E (|f| - f_n) d\mu + \int_E f_n d\mu \leq \int_X (|f| - f_n) d\mu + \int_E n d\mu < \frac{\epsilon}{2} + n\mu(E) < \frac{\epsilon}{2} + n\frac{\epsilon}{2n} = \epsilon$$

■

7.1 רציפות בהחלט

הגדרה 7.2 תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. נאמר ש-f רציפה בהחלט ב-$[a,b]$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם הקטעים $[a_k, b_k] \subset [a,b]$ זרים בזוגות עבור $1 \leq k \leq n$ ואם $\sum_{k=1}^{n} b_k - a_k < \delta$ מתקיים $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$.

טריוויאלי לראות שרציפות בהחלט גוררת רציפות במידה שווה, אך ההפך **לא תמיד נכון**.

משפט 7.3 (הכללת המשפט היסודי) תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}^*$ מוגדרת ואינטגרבילית dm. לכל $x \in [a,b]$ נגדיר

$$F(x) = \int_a^x f dm$$

אזי F רציפה בהחלט ב-$[a,b]$.

הוכחה. יהי $\epsilon > 0$ נתון. כיוון ש-f אינטגרבילית, משפט **7.1** אומר שקיים $\delta > 0$ כך שאם $E \subset [a,b]$ מדידה ואם $m(E) < \delta$ אז

$$\int_E |f| dm < \epsilon$$

כעת נניח שהקטעים $(a_k, b_k)_{k=1}^{n}$ מוכלים ב-$[a,b]$ וזרים בזוגות. נניח ש-

$$\sum_{k=1}^{n} b_k - a_k < \delta$$

לכן אם נגדיר $E = \biguplus_{k=1}^{n} (a_k, b_k)$ אז מתקיים $m(E) < \delta$, ומכל זה נובע ש-

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_a^{b_k} f dm - \int_a^{a_k} f dm \right| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{a_k}^{b_k} f dm \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} |f| dm$$

$$= \int_E |f| dm < \epsilon$$

ולכן F רציפה בהחלט. ■

המטרה הבאה שלנו היא להוכיח שאם $F(x) = \int_a^x f dm$ אז $F' = f$ כב"מ. נסתמך בין היתר על הלמה הבאה.

למה 7.4 תהי $E \subset [a,b]$ קבוצה מדידה כך ש-$m(E) = s > 0$. אזי לכל $\epsilon > 0$ קיימת **קבוצה סגורה** $F \subset E$ כך ש-$m(F) > s - \epsilon$.

הוכחה. ההוכחה מושארת כתרגיל. ∎

משפט 7.5 תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}^*$ פונקציה אינטגרבילית. נניח שלכל $c \in [a,b]$ $\int_a^c fdm = 0$. אזי $f(x) = 0$ כב"מ ב-$[a,b]$.[23]

הוכחה. תחילה נעיר שאם $[\alpha, \beta]$ קטע כלשהו בתוך $[a,b]$, אז

$$\int_\alpha^\beta fdm = \int_a^\beta fdm - \int_a^\alpha fdm = 0 - 0 = 0$$

נמשיך בדרך השלילה. אם $f(x) \not\equiv 0$ כב"מ, אז קיים $E \subset [a,b]$ כך ש-$m(E) > 0$ ו-$f(x) > 0$ לכל $x \in E$ או $f(x) < 0$ לכל $x \in E$. בלי הגבלת הכלליות $f(x) > 0$ ב-E. לפי הלמה, קיימת $F \subset E$ סגורה ו-$m(F) > 0$. ממשפט בפרק הקודם $\int_F fdm > 0$. כיוון ש-F סגורה, $(a,b) \backslash F$ פתוחה ונוכל לכתוב

$$(a,b) \backslash F = \biguplus_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n)$$

או:

$$(a,b) = F \uplus \biguplus_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n)$$

ונובע ש-

$$0 = \int_a^b fdm = \int_F fdm + \int_{\biguplus_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n)} fdm = \int_F fdm + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} dm}_{=\mathbf{0}} > 0$$

ובעצם הוכחנו $0 > 0$! הסתירה מוכיחה את המשפט. ∎

מסקנה 7.6 נניח ש-$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}^*$ פונקציות אינטגרביליות ונניח שלכל $c \in [a,b]$

$$\int_a^c fdm = \int_a^c gdm$$

אזי $f(x) = g(x)$ כב"מ ב-$[a,b]$.

הוכחה. לפי הנתון $\int_a^c (f-g)dm = 0$ לכל $c \in [a,b]$. לפי משפט **7.5** $f(x) - g(x) = 0$ כב"מ ב-$[a,b]$. ∎

[23] כבר הוכחנו זאת עבור $f(x) \geq 0$, אבל פה זה לא נתון.

משפט 7.7 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}^*$ פונקציה אינטגרבילית. לכל $x\in[a,b]$ נגדיר

$$F(x)=\int_a^x fdm$$

אזי $F(x)$ גזירה כב"מ ב-$[a,b]$ וכב"מ $F'(x)=f(x)$.[24]

הוכחה. נחלק למקרים.

__מקרה 1:__ נניח ש-$f(x)$ חסומה. ז"א, קיים $M>0$ כך שלכל $x\in[a,b]$, $|f(x)|\le M$, ונמשיך את f מחוץ ל-$[a,b]$ ע"י $f(x)=0$ לכל $x>b$.[25], לכל n נגדיר

$$F_n(x)=\frac{F(x+\frac{1}{n})-F(x)}{\frac{1}{n}}$$

לפי מסקנה **6.6** F גזירה כב"מ וכב"מ

$$F'(x)=\lim_{n\to\infty}F_n(x)$$

נשים לב שלכל $x\in[a,b]$:

$$F_n(x)=n\int_x^{x+\frac{1}{n}}fdm$$

נובע ש-

$$|F_n(x)|\le n\int_x^{x+\frac{1}{n}}|f|dm\le n\int_x^{x+\frac{1}{n}}Mdm=M$$

כעת אם $c\in[a,b]$ אז $F_n\to F'$ כב"מ ובאופן חסום בקטע $[a,b]$. לפי משפט ההתכנסות החסומה:

$$\int_a^c F'dm=\lim_{n\to\infty}\int_a^c F_ndm=\lim_{n\to\infty}n\int_a^c\left[F(x+\frac{1}{n})-F(x)\right]dm=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}}Fdm-\int_a^cFdm\right]=\lim_{n\to\infty}n\int_c^{c+\frac{1}{n}}Fdm-n\int_a^{a+\frac{1}{n}}Fdm$$

כיוון ש-F רציפה, נקבל את השיוויון:

$$=F(c)-F(a)=\int_a^cfdm$$

הדבר נכון לכל $c\in[a,b]$. לפי המסקנה למשפט **7.5** $f=F'$ כב"מ ב-$[a,b]$.

__מקרה 2:__ $f(x)\ge 0$ ואינטגרבילית[26]. לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x) & f(x)\le n\\ n & f(x)>n\end{cases}$$

---

[24] יש לשים לב שמדובר בשני כב"מים שונים! כלומר, קיימת קבוצה ממידה 0 בה F אינה גזירה, וקיימת קבוצה ממידה 0 שם F' מוגדרת ושונה מ-f.

[25] ומילא $F(x)=F(b)$ לכל $x>b$.

[26] אך לאו דווקא חסומה.

ונגדיר $0 \leq g_n(x) = f(x) - f_n(x)$. עוד נגדיר

$$F_n(x) = \int_a^x f_n dm$$

$$G_n(x) = \int_a^x g_n dm$$

כיוון שלכל n מתקיים $f = f_n + g_n$ אז לכל $x \in [a, b]$:

$$F(x) = F_n(x) + G_n(x)$$

$$\int_a^x f dm = \int_a^x f_n dm + \int_a^x g_n dm$$

נעיר שכיוון ש-$g_n(x) \geq 0$, $G_n(x)$ עולה ולפי משפט **6.4** $G_n'(x)$ קיימת ולא שלילית כב"מ. לכן כב"מ:

$$F'(x) = F_n'(x) + G_n'(x)$$

ולפי מקרה 1 $F_n'(x) = f_n(x)$ כב"מ, ולכן כב"מ

$$F'(x) = f_n(x) + G_n'(x) \geq f_n(x)$$

הדבר נכון לכל n ולכן כב"מ

$$F'(x) \geq \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

כעת לכל $c \in [a, b]$

$$\int_a^c F' dm \geq \int_a^c f dm = F(c) - F(a)$$

לפי הגדרה, כי $F(a) = \int_a^a f dm = 0$. אבל נתון ש-$f(x) \geq 0$, ולכן $F(x)$ עולה ב-$[a, b]$, ולפי משפט **6.4**

$$\int_a^c F' dm \leq F(c) - F(a)$$

ונוכל להסיק שלכל $c \in [a, b]$:

$$\int_a^c F' dm = F(c) - F(a) = \int_a^c f dm$$

ולפי המסקנה למשפט **7.5** $F' = f$ כב"מ ב-$[a, b]$.

<u>מקרה 3:</u> f אינטגרבילית כלשהי, כאן נכתוב:

$$f = f^+ - f^-$$

נגדיר:

$$G(x) = \int_a^x f^+ dm$$

$$H(x) = \int_a^x f^- dm$$

ולפי מקרה 2 כב"מ $G' = f^+$, $H' = f^-$ כי $0 \leq f^+, f^-$ אבל

$$F = G - H$$

ולכן כב"מ

$$F' = G' - H' = f^+ - f^- = f$$

■

לסיכום, המשפט הבא מסכם את מה שהוכחנו, הכללת חלק א' למשפט היסודי.

משפט 7.8 (הכללת לבג למשפט היסודי של חשבון אינטגרלי חלק א') תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}^*$ אינטגרבילית ונגדיר לכל $x \in [a,b]$:

$$F(x) = \int_a^x f dm$$

אזי F רציפה בהחלט ב-$[a,b]$ וכב"מ $F'(x)$ קיימת ושווה $f(x)$.

כעת נפתח כליס להוכיח את הכללת לבג לחלק השני של המשפט היסודי. הוא הוכיח שאם $f : [a,b] \to \mathbb{R}^*$ רציפה בהחלט אז f' קיים כב"מ ואינטגרבילית ומתקיים

$$\int_a^b f' dm = f(b) - f(a)$$

הערה. אי-אפשר לשפר תוצאה זו, כי אם נכון לכל $c \in [a,b]$ ש-$\int_a^c f' dm = f(c) - f(a)$, ואז בעצם $f(c)$ היא אינטגרל לא מסוים, והיא רציפה בהחלט לפי משפט **7.8**.

כדי להוכיח את המשפט, תחילה נראה שאם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה ובהחלט $f'(x)$ קיימת כב"מ ב-$[a,b]$. לצורך זה נשתמש במושג של השתנות חסומה.

אינטואיטיבית, ההשתנות של $f(x)$ בקטע $[a,b]$ היא סכום כל השינויים שלה בערך מוחלט.

לדוגמא, עבור $f(x) = \sin x$ בקטע $[0, 2\pi]$:

1. בקטע $[0, \frac{\pi}{2}]$ f עלתה 1.
2. בקטע $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ירדה 2.
3. בקטע $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ עלתה 1.

7.2 השתנות חסומה

הגדרה 7.9 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. נעשה חלוקה P של $[a,b]$:

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

ונגדיר את ההשתנות של f ב-P ע"י

$$V(f,P)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

ההשתנות הכוללת של f ב-$[a,b]$ מוגדרת ע"י

$$T_a^b(f)=\sup_P V(f,P)$$

ואם $T_a^b(f)<\infty$ אומרים ש-f בעלת השתנות חסומה ב-$[a,b]$.

משפט 7.10 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ בעלת השתנות חסומה $\iff$ $f=g-h$ כאשר g ו-h עולות ב-$[a,b]$.

ההוכחה אינה מוצגת כאן.

למה 7.11 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. נעשה חלוקה

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

אזי

$$T_a^b(f)=\sum_{k=1}^{n}T_{x_{k-1}}^{x_k}(f)$$

משפט 7.12 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בהחלט. אזי

$$T_a^b(f)<\infty$$

הוכחה. נבחר $\epsilon=1$. אזי, לפי הגדרת רציפות בהחלט קיים $\delta>0$ כך שאם $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^n$ הם קטעים זרים בזוגות בתוך $[a,b]$ כך ש-$\sum_{k=1}^n|b_k-a_k|<\delta$ אזי

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<1$$

כעת, ניקח תת-קטע $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ כך ש-$\beta-\alpha<\delta$. עבור חלוקה כלשהי P: $\alpha=x_0<x_1<\cdots<x_n=\beta$ מתקיים כי

$$V(f,P)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|<1$$

כי $\sum_{k=1}^{n} x_k - x_{k-1} < \delta$. נובע ש-

$$T_\alpha^\beta(f) = \sup_P V(f,P) \leq 1$$

וכיוון ש-$[a,b]$ קטע סופי נוכל לעשות חלוקה $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ כך שלכל k: $x_k - x_{k-1} < \delta$. לפי הלמה שלעיל,

$$T_a^b = \sum_{k=1}^{m} T_{x_{k-1}}^{x_k}(f) \leq \sum_{k=1}^{m} 1 = m$$

■

מסקנה 7.13 אם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה בהחלט, אז $f'(x)$ קיימת כב"מ ומדידה.

הוכחה. לפי משפט **7.12** מתקיים:

$$T_a^b(f) < \infty$$

ולכן לפי משפט **7.10** $f = g - h$ כאשר g ו-h עולות, ולפי משפט **6.4** g' ו-h' קיימות כב"מ ומדידות. לכן $f' = g' - h'$ קיימת כב"מ ומדידה. ■

מסקנה 7.14 אם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה בהחלט אז f' אינטגרבילית לבג ב-$[a,b]$.

הוכחה. לפי המסקנה הראשונה, $f = g - h$ כך ש-g,h עולות, ו-$f' = g' - h'$ כב"מ ו-f' מדידה. לכן כב"מ

$$|f'(x)| \leq g'(x) + h'(x)$$

ולפי משפט **6.4**

$$\int_a^b [g' + h']dm \leq g(b) - g(a) + h(b) - h(a) < \infty$$

ונובע ממשפט בפרק הקודם ש-f' אינטגרבילית. ■

משפט 7.15 תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה בהחלט, ונניח ש-$f'(x) = 0$ כב"מ ב-$[a,b]$. אזי $f(x)$ קבועה ב-$[a,b]$.

הוכחה. ניקח $c \in [a,b]$ כלשהו. נוכיח ש-$f(a) = f(c)$. לצורך זה, נגדיר $E = \{x \in [a,c] : f'(x) = 0\}$. לפי הנתון $m(E) = c - a$.

כעת, יהי $\epsilon > 0$ נתון. נבחר $\delta > 0$ מתאים ל-ϵ בהגדרה של רציפות בהחלט של f. נעיר שלכל $x \in E$ יש מספרים קטנים כרצוננו כך ש-

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| < \epsilon$$

אז קטעים אלה מהסוג $[x, x+h]$ (או $[x+h, h]$ אם $h < 0$) מהווים כיסוי ויטלי של E. לפי למת ויטלי נוכל לבחור מספר סופי של קטעים כאלה בזוגות $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{n}$ כך ש-

$$\sum_{k=1}^{n} y_k - x_k > c - a - \delta$$

ולכל k,

$$\left|\frac{f(y_k)-f(x_k)}{y_k-x_k}\right| < \epsilon \implies |f(y_k)-f(x_k)| < \epsilon(y_k-x_k)$$

לנוחיות, נגדיר $a=y_0$ ו-$c=x_{n+1}$, ונרשום

$$f(c)-f(a)=f(x_{n+1})-f(y_n)+f(y_n)-f(x_n)+f(x_n)-f(y_{n-1})+\cdots+f(y_1)-f(x_1)+f(x_1)-f(y_0)$$

מכאן

$$|f(c)-f(a)| \le \sum_{k=1}^{n}|f(y_k)-f(x_k)| + \sum_{k=1}^{n+1}|f(x_k)-f(y_{k-1})|$$

לפי הבנייה שלנו לכל k:

$$|f(y_k)-f(x_k)| < \epsilon(y_k-x_k)$$

ולכן

$$\sum_{k=1}^{n}|f(y_k)-f(x_k)| < \epsilon\cdot\sum_{k=1}^{n} y_k-x_k < \epsilon(c-a-\delta)$$

כמו כן לפי הבנייה:

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k-y_{k-1} < \delta$$

ולכן עפ"י רציפות בהחלט

$$\sum_{k=1}^{n+1}|f(x_k)-f(y_{k-1})| < \epsilon$$

ומכל זה נסיק ש-

$$|f(c)-f(a)| < \epsilon(c-a-\delta)+\epsilon$$

$\epsilon>0$ קטן כרצוננו, ולכן נוכל להשאיף $\epsilon\to 0$ להסיק $f(c)=f(a)$, הדבר נכון לכל $c\in[a,b]$ לכן f קבועה. ■

משפט 7.16 (הכללת לבג למשפט היסודי חלק ב') תהי $f(x)$ מוגדרת ורציפה בהחלט ב-$[a,b]$. אזי $f'(x)$ קיימת כב"מ ב-$[a,b]$ ואינטגרבילית שם, ומתקיים

$$\int_a^b f'dm = f(b)-f(a)$$

הוכחה. לכל $x \in [a,b]$ נגדיר $F(x) = \int_a^x f'dm$. F מוגדרת היטב ועפ"י מסקנה ממשפט **7.12**, f' אינטגרבילית. לפי משפט **7.8** F רציפה בהחלט ומתקיים $F'(x) = f'(x)$ כב"מ. כעת נגדיר $g(x) = F(x) - f(x)$. כיוון ש-F וגם f (עפ"י הנתון) רציפות בהחלט, גם g רציפה בהחלט. לפי הנתונים כב"מ

$$g'(x) = F'(x) - f'(x) = 0$$

ולכן נובע ממשפט **7.15** ש-$g(x) \equiv c$ ב-$[a,b]$, לכן עבור כל $x \in [a,b]$: $c = g(x) = F(x) - f(x)$. נובע ש-

$$f(b) - f(a) = [F(b) - c] - [F(a) - c] = F(b) - F(a) = \int_a^b f'dm$$

■

8 משפט לבג

כעת נעבור למשפט לבג, האומר שפונקציה חסומה $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן $\iff$ $f(x)$ רציפה כב"מ (dm), ואם כן f אינטגרבילית לבג ומתקיים

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\textbf{Riemman}} = \underbrace{\int_a^b f dm}_{\textbf{Lebesgue}}$$

כדי להוכיח משפט זה נחזור בקיצור על הבנייה של אינטגרל רימן מאינפי 2. ובכן אם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ חסומה, נעשה חלוקה P של $[a,b]$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

ונבנה $\overline{S}(f,P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$ ו-$\underline{S}(f,P) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$, כאשר לכל k $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$ ו-$m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$.

כמו כן, מגדירים $\lambda(p) = \max_{1 \le k \le n}(\Delta x_k)$. עוד מגדירים אינטגרל עליון

$$\overline{\int_a^b} f = \inf_P \overline{S}(f,P)$$

ואינטגרל תחתון

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_P \underline{S}(f,P)$$

ואומרים ש-f אינטגרבילית רימן אם $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, והערך המשותף הוא $\int_a^b f(x)dx$. משפט דרבו אומר שתמיד

$$\overline{\int_a^b} f = \lim_{\lambda(P) \to 0} \overline{S}(f,P)$$

$$\underline{\int_a^b} f = \lim_{\lambda(P)\to 0} \underline{S}(f,P)$$

לכן עבור f כלשהי ניתן לחשב את $\overline{\int} f$ ו-$\underline{\int} f$ כגבולות של $\overline{S}(f,P_n)$ ו-$\underline{S}(f,P_n)$ בהתאמה כאשר P_n חלוקה שווה של $[a,b]$ ל-2^n קטעים.

אם ניקח למשל חלוקה P_2 עבור f כלשהי, אז שטח המלבנים הוא $\overline{S}(f,P_2) = \int_a^b \varphi_2(x)dx$ כש-φ_2 פונקציית מדרגות שעל כל תת-קטע של חלוקה מקבלת ערך מקסימלי של f. כמו כן לכל n:

$$\overline{S}(f,P_n) = \int_a^b \varphi_n(x)dx$$

כאשר φ_n פונקציית מדרגות המקיימת $f(x) \le \varphi_n(x)$, ונעיר של-φ_n אין הבדל בין אינטגרל רימן לאינטגרל לבג. כמו כן, לכל n:

$$\underline{S}(f,P_n) = \int_a^b \psi_n(x)dx$$

כאשר $\psi_n(x) \le f(x)$ פונקציית מדרגות. לפי הבנייה,

$$\varphi_1(x) \ge \varphi_2(x) \ge \varphi_3(x) \ge \dots$$

$$\psi_1(x) \le \psi_2(x) \le \psi_3(x) \le \dots$$

כעת, ניקח $x \in [a,b]$ שלא בנקודות החלוקה של אף P_n, ונעיז לחשב

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_0)$$

ובכן, עבור n כלשהו $\varphi_n(x_0) =$ החסם העליון של $f(x)$ באיזה קטע $I_{n,k}$ של החלוקה P_n. כעת, $|I_{n,k}| = \frac{b-a}{2^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I_{n,k}} f(x) = \max\left\{f(x_0), \overline{\lim_{x\to x_0}} f(x)\right\}$$

קוראים לזה $f^U(x_0)$, ובאותה מידה

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x_0) = \min\left\{f(x_0), \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x)\right\} = f^L(x_0)$$

כב"מ $\varphi_n \to f^U$, $\psi_n \to f^L$, והכל כאן חסום. לכן עפ"י משפט ההתכנסות החסומה,

$$\overline{\int_a^b} f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n dm = \int_a^b f^U dm$$

וכמו כן

$$\underline{\int_a^b} f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n dm = \int_a^b f^L dm$$

לפי הגדרה, f אינטגרבילית רימן $\iff$

$$\overline{\int} f = \underline{\int} f \iff \int_a^b f^U dm = \int_a^b f^L dm \iff \int_a^b \left(f^U - f^L\right) dm = 0$$

אבל לפי בנייה כב"מ $f^U - f^L \geq 0$ ולכן עפ"י משפט מהפרק הקודם f אינטגרבילית רימן $\iff$ $f^U = f^L$ כב"מ. ז"א, לכמעט כל $x_0 \in [a,b]$:

$$\max\left\{f(x_0), \overline{\lim_{x\to x_0}} f(x)\right\} = \min\left\{f(x_0), \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x)\right\}$$

ז"א, כב"מ:

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = f(x_0) = \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x)$$

וזה קורה $\iff$ f רציפה כב"מ ב-$[a,b]$.

כעת, נניח שאומנם f אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$, ולכן f רציפה כב"מ ומתקיים כב"מ

$$f(x) = f^U(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

ולכן

$$\int_{\text{Lebesgue}} f dm = \lim_{n\to\infty} \int_{\text{Lebesgue}} \varphi_n dm = \lim_{n\to\infty} \int_{\text{Riemman}} \varphi_n dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, P_n) = \int_a^b f(x)dx$$

ולכן הוכחנו את משפט לבג.

חלק IV

מידות מכפלה ומשפט פוביני

9 מידת מכפלה, משפט פוביני וטונלי

נתחיל עם שני ממ"ח $(X,\mathcal{S},u)$ ו-$(Y,\mathcal{T},v)$. נבנה בצורה קנונית מידת מכפלה $w = u \times v$ על σ אלגברה $\mathcal{U}$ של תת-קבוצות של $X \times Y$.

הגדרה 9.1 תהי $E \in \mathcal{S}$ ו-$F \in \mathcal{T}$ קבוצות (מדידות) כלשהן. המכפלה הקרטזית $E \times F \subset X \times Y$ נקראית מלבן מדיד. נגדיר את נפחו ע"י:

$$|E \times F| = u(E) \cdot v(F)$$

ואם אחד המכופלים הוא 0 הנפח הוא 0.

הגדרה 9.2 לכל $E \subset X \times Y$ נגדיר מידה חיצונית:

$$w^*(E) = \inf_{E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n} \sum_{n=1}^{\infty} |R_n|$$

כאשר ה-R_n הם מלבנים מדידים.

הגדרה 9.3 עבור $E \subset X \times Y$ נאמר ש-E *מדידה* אם לכל תת-קבוצה $S \subset X \times Y$ מתקיים:

$$w^*(S) = w^*(S \cap E) + w^*(S \cap E^C)$$

ונגדיר $\mathcal{U}$ להיות אוסף כל הקבוצות המדידות.

משפט 9.4 $\mathcal{U}$ היא σ-אלגברה של תת-הקבוצות של $X \times Y$. $\mathcal{U}$ מכילה כל קבוצה $E \subset X \times Y$ כך ש-$w^*(E) = 0$ וכל מלבן מדיד נמצא ב-$\mathcal{U}$, ויתר על כן הצמצום של w^* ל-$\mathcal{U}$ הוא מידה המכונה $w = u \times v$ ולכל מלבן מדיד R מתקיים ש-$w(R) = |R|$.

הגדרה 9.5 קבוצה $E \subset X \times Y$ היא מטיפוס R_σ אם היא איחוד בן מניה של מלבנים מדידים, ו-E מטיפוס $R_{\sigma\delta}$ אם היא חיתוך בן מניה של קבוצות R_σ. אוטומטית כל קבוצה R_σ או $R_{\sigma\delta}$ נמצאת ב-$\mathcal{U}$.

משפט 9.6 אם $E \in R_\sigma$ אז E הוא איחוד זר בן מניה של מלבנים מדידים, ואם $E \in R_{\sigma\delta}$ אז E הוא חיתוך יורד של קבוצות ב-R_σ.

משפט 9.7 נניח ש-$E \in \mathcal{U}$ ו-$w(E) < \infty$. אזי קיים $F \in R_{\sigma\delta}$ ו-$G \in \mathcal{U}$ כך ש-$w(G) = 0$ ו-$F = E \uplus G$ (או $E = F \backslash G$).

הוכחה. נרשום $w(E) = s < \infty$. לפי ההגדרה של w, לכל $n \in \mathbb{N}$ יש מלבנים מדידים $\{R_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ כך ש-

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_{n,k} \equiv R_n$$

ו-

$$\sum_{k=1}^{\infty} |R_{n,k}| < s + \frac{1}{n}$$

כעת, $R_n \in R_\sigma$, ו-$E \subset R_n$ ולפי הבנייה $s \le w(R_n) < s + \frac{1}{n}$. לבסוף נגדיר

$$R = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n \in R_{\sigma\delta}$$

ולפי הבנייה לכל n מתקיים $E \subset R_n$ ולכן $E \subset R$. ז"א, לכל n

$$E \subset R \subset R_n$$

ויוצא שלכל n:

$$w(E) \le w(R) \le w(R_n) \implies s \le w(R) < s + \frac{1}{n}$$

ומשפט הסנדוויץ' נותן $w(R) = s = w(E)$, ולכן

$$R = E \uplus R \backslash E$$

אם רק נגדיר $F = R$, $G = R \backslash E$ אז $F \in F_\sigma$, $w(G) = 0$ ו-$F = E \uplus G$. ■

משפט 9.8 (משפט פוביני) יהיו $(X, \mathcal{S}, u)$ ו-$(Y, \mathcal{T}, v)$ שני ממ"ח, כאשר u ו-v שלמות. נבנה כנ"ל $(X \times Y, \mathcal{U}, w)$, ונניח ש-$f : X \times Y \to \mathbb{R}^*$ אינטגרבילית dw. אזי,

1. לכמעט כל $x \in X$, הפונקציה $f_x(y) = f(x, y)$ אינטגרבילית dv על Y.
2. לכמעט כל $y \in Y$, הפונקציה $f_y(x) = f(x, y)$ אינטגרבילית du על X.
3. הפונקציה $g(x) = \int_Y f(x, y) dv(y)$ אינטגרבילית du על X.
4. הפונקציה $h(y) = \int_X f(x, y) du(x)$ אינטגרבילית dv על Y.
5. מתקיים:

$$\int_X \left[\int_Y f dv \right] du = \int_{X \times Y} f dw = \int_Y \left[\int_X f du \right] dv$$

הוכחה. נוכיח כאן רק **תקציר של ההוכחה**. כאן נוכיח בעיקר רק את טענה 5, ולזה מספיק להראות ש-

$$\int_X \left[\int_Y f dv \right] du = \int_{X \times Y} f dw$$

כי השיוויון השני שקול לזה ע"י סימטריה. נוכיח זאת בכמה שלבים.

שלב א'. עבור $f = I_E$ כאשר $E = A \times B$ מלבן מדיד. כיוון ש-f אינטגרבילית בהכרח $w(E) < \infty$, ולכן $u(A) < \infty$ וגם $v(B) < \infty$. תחילה נעיר ש-$E = A \times B$ אומר

$$I_E(x, y) = I_A(x) I_B(y)$$

ונובע כי

$$\int_X du \int_Y I_E(x, y) dv = \int_X du \int_Y I_A(x) I_B(x) dv(y) =$$

$$= \int_X I_A(x) du \int_Y I_B(y) dv = u(A) \cdot v(B) = w(E) = \int_{X \times Y} I_E dw$$

שלב ב'. $f = I_E$ כאשר $E \in R_\sigma$, $w(E) < \infty$. לפי משפט **9.6**

$$E = \biguplus_{n=1}^{\infty} R_n$$

ו-R_n מלבנים מדידים. כיוון שהאיחוד זר,

$$I_E(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} I_{R_n}(x,y)$$

נובע ש-

$$\int_X du \int_Y I_E(x,y)dv = \int_X du \int_Y \left[\sum_{n=1}^{\infty} I_{R_n}(x,y)\right] dv =$$

$$= \int_X du \sum_{n=1}^{\infty} \int_Y I_{R_n}(x,y)dv = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X du \int_Y I_{R_n}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X\times Y} I_{R_n}(x,y)dw =$$

$$= \int_{X\times Y} \sum_{n=1}^{\infty} I_{R_n}(x,y)dw = \int_{X\times Y} I_E(x,y)dw$$

כאשר השלבים נובעים ממשפט ההתכנסות המונוטונית, ומשלב א' בגלל שכל R_n הוא מלבן מדיד.

שלב ג'. $f=I_E$ כאשר $E\in R_{\sigma\delta}$, $w(E)<\infty$. כאן $E=\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, כל $E_n\in R_\sigma$ ו-$E_1\supset E_2\supset E_3\supset\ldots$. כיוון ש-$w(E)<\infty$ בה"כ $w(E_1)<\infty$.

מכאן נובע ש-$I_{E_1}(x,y)\ge I_{E_2}(x,y)\ge\ldots$ ו-

$$I_E(x,y)=\lim_{n\to\infty} I_{E_n}(x,y)$$

כעת נעיר שעפ"י תרגיל

$$\int_{X\times Y} I_E dw = w(E) = \lim_{n\to\infty} w(E_n) = \lim_{n\to\infty}\int_{X\times Y} I_{E_n}dw = \lim_{n\to\infty}\int_X du\int_Y I_{E_n}(x,y)dv$$

באינטגרל הפנימי יש לנו פונקציות $I_{E_n}(x,y)$ (עבור x קבוע), ולפי הבנייה לכל $x\in X$: $0\le I_{E_n}(x,y)\le I_{E_1}(x,y)$ ו-$I_{E_n}(x,y)\to I_E(x,y)$ מוכיחים שעבור כמעט כל x $I_{E_1}(x,y)$ אינטגרבילית dv ולכן אפשר להפעיל את ההתכנסות הנשלטת לומר

$$\lim_{n\to\infty}\int_X du\int_Y I_{E_n}(x,y)dv = \int_X du\int_Y I_E(x,y)dv$$

ששווה לכתחילה $\int_{X\times Y} I_E dw$ ובזה הוכחנו שלב זה.

שלב ד'. $f=I_E$ כאשר $w(E)=0$. ההוכחה מושארת כתרגיל.

שלב ה'. $f=I_E$ כאשר E מדידה ו-$w(E)<\infty$. ממשפט **9.7** ידוע כי קיים $F\in R_{\sigma\delta}$ ו-$G\in\mathcal{U}$ כך ש-$w(G)=0$ ו-$F=E\uplus G$. לכן,

$$I_F=I_E+I_G$$

ולגבי I_F המשפט הוכח בשלב ג', ולגבי I_G המשפט הוכח בשלב ד', ולכן שלב ה' נובע מליניאריות האינטגרלים.

שלב ו'. f היא פונקציה פשוטה אינטגרבילית. ז"א,

$$f=\sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$$

וכיוון ש-f אינטגרבילית כל $w(E_k) < \infty$. המשפט כבר הוכח לכל I_{E_k} בשלב ה' ולכן שלב ו' נובע מליניאריות האינטגרל.

שלב ז'. $f(x,y) \geq 0$ ואינטגרבילית dw. כידוע, יש סדרה

$$0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots$$

של פונקציות פשוטות ששואפות נקודתית ל-f. כיוון שכל $\varphi_n \leq f$ כל φ_n אינטגרבילית ועפ"י מונוטוניות נוכל לומר:

$$\int_{X\times Y} f dw = \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} \varphi_n dw = \lim_{n\to\infty} \int_X du \int_Y \varphi_n dv = \int_X du \int_Y f dv$$

כאשר הצעדים נובעים משלב ו' והתכנסות מונוטונית.

שלב ח'. f אינטגרבילית כלשהי. אזי, $f = f^+ - f^-$ כאשר f^+ ו-f^- לא שליליות ואינטגרביליות. בשלב ז' המשפט הוכח ל-f^+ ו-f^-, ולכן שלב ח' נובע מליניאריות האינטגרל. ∎

הערות.

1. אפשר להראות שאם $u = v =$ מידת לבג על $\mathbb{R}$ אז $w = u \times v$ היא מידת לבג על $\mathbb{R}^2$ ובאינדוקציה אפשר לבנות בדרך זו מידת לבג על $\mathbb{R}^n$.
2. אף על פי שהמשפט נוסח לפונקציות על $X \times Y$ כולו, אפשר להפעיל אותו על $f(x,y)$ מוגדרת באיזה $E \in \mathcal{U}$ ע"י שנמשיך את f להיות 0 ב-E^C.
3. כבר הוכיחו בתרגיל שאם $u =$ מידת הספירה על $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, אז בעצם לפונקציה כלשהי

$$f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$$

אז

$$\int_{\mathbb{N}} f du = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

ואם $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^*$ פונקציה כלשהי היא אינטגרבילית $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ מתכנס בהחלט, ואם כן

$$\int_{\mathbb{N}} f du = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

אם נפעיל את פוביני ל-$u \times u$ על $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ נקבל תוצאה על טורים כפולים: אם

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}| < \infty$$

אז

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$$

4. יש הכללה של משפט פוביני לפונקציות $f : X\times Y \to [0,\infty]$ שבה אין צורך להניח מראש ש-f אינטגרבילית dw. אבל, משפט זה הוא נכון רק בהנחה נוספת: שהמידות u, v הן סופיות σ.

הגדרה 9.9 יהי $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ממ"ח. אומרים ש-u סופית σ אם יש קבוצות $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ ב-$\mathcal{S}$ כך ש-$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ולכל n מתקיים: $\mu(E_n) < \infty$.

למשל, מידת לבג על $\mathbb{R}$ לא מידה סופית כי $m(\mathbb{R}) = \infty$, אבל היא σ סופית כי $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n,n)$ ו-$m((-n,n)) = 2n < \infty$.

משפט 9.10 (משפט טונלי) יהיו $(X, \mathcal{S}, u)$ ו-$(Y, \mathcal{T}, v)$ ממ"ח עבור מידות שלימות ו-σ-סופיות u ו-v. נניח ש-$f : X \times Y \to [0,\infty]$ מדידה dw. אזי,

1. לכמעט כל x- $f_x(y) = f(x,y)$ מדידה $\mathcal{T}$.
2. לכמעט כל y- $f_y(x) = f(x,y)$ מדידה $\mathcal{S}$.
3. $g(x) = \int_Y f(d,y)dv(y)$ מדידה $\mathcal{S}$.
4. $h(y) = \int_X f(x,y)du(x)$ מדידה $\mathcal{T}$.
5. מתקיים:

$$\int_X \left[\int_Y f dv\right] du = \int_{X\times Y} f dw = \int_Y \left[\int_X f du\right] dv$$

ההוכחה בדיוק כמו זו של משפט פוביני בשלבים (א) עד (ו), ודווקא לפונקציות פשוטות ואינטגרביליות (כמו בפוביני). רק בשלב ז' יש שינוי קטן: אם $f : X \times Y \to [0,\infty]$ מדידה, אז היא גבול של סדרה עולה של פונקציות פשוטות ואינטגרביליות, אפילו אם f לא אינטגרבילית (בגלל σ-סופיות של המידות). שלב ח' איננו!

חלק V

מבוא לאנליזה פונקציונלית

10 מרחבים נורמים ומרחבי בנך

הגדרה 10.1 יהי X מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. *נורמה על* X היא פונקציה

$$\|\cdot\| : X \to [0, \infty]$$

כך שלכל $x, y \in X$ ו-$\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים:

1. $\|x\| \geq 0$ עם שיוויון רק עבור $x = 0$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (אי-שיוויון המשולש).

הזוג $(X, \|\cdot\|)$ נקרא מרחב *נורמי*.

דוגמאות פשוטות.

1. $\mathbb{R}^n$ או $\mathbb{C}^n$ עם הנורמה האוקלידית

$$\|x\| = \|(x_1, \dots x_n)\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2. על $\mathbb{R}^n$ או $\mathbb{C}^n$ יש עוד נורמות, למשל $\|x\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.

כל נורמה על X משרה מטריקה ע"י $d(x, y) = \|x - y\|$, ובודקים את הדרישות של מטריקה:

1. $d(x, y) \geq 0$, ושיוויון רק עבור $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ אי-שיויון המשולש.

הערות פשוטות.

1. במרחב נורמי $\|x\| = \|x - 0\| = dist(x, 0)$.
2. המטריקה במרחב נורמי שמורה תחת הזזה. ז"א, אם $x, y, z \in X$, אז:

$$dist(x + z, y + z) = \|(x + z) - (y + z)\| = \|x - y\| = dist(x, y)$$

ברגע שיש מטריקה, יש מושג של התכנסות של סדרות, גבולות וכו'.

הגדרה 10.2 יהי $(X,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי, ותהי $\{x_n\}$ סדרה של נקודות ב-X. עבור $x_0\in X$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

אם כל $\epsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שאם $n>n_0$

$$\|x_n-x_0\| = d(x_n,x_0) < \epsilon$$

סדרה $\{x_n\}$ ב-X נקראית סדרת קושי אם לכל $\epsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שאם $m,n>n_0$ אז $\|x_m-x_n\|<\epsilon$.

קל להוכיח שכל סדרה שמתכנסת היא סדרת קושי. **ההיפך לא תמיד נכון.** אם $(X,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי שבו כל סדרת קושי מתכנסת לאיבר ב-X, אז אומרים ש-X מרחב שלם. מרחב נורמי שלם נקרא **מרחב בנך**.

דוגמאות.

1. נקח קטע $[a,b]\subset\mathbb{R}$. $C([a,b])$ הוא אוסף כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a,b]$. מקובל להגדיר נורמה על $C([a,b])$ ע"י:

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

נבדוק שהנ"ל נורמה:

1. לכל $f\in C([a,b])$:

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \geq 0$$

ואם $\|f\|=0$ הרי שהמקסימום של $|f(x)|$ הוא 0 ולכן $f(x)\equiv 0$ ב-$[a,b]$.

2. אם $\alpha\in\mathbb{R}$ ו-$f\in C([a,b])$ אזי,

$$\|\alpha f\| = \max|\alpha f(x)| = \max|\alpha||f(x)| = \alpha\max|f(x)| = |\alpha|\|f\|$$

3. אם $f,g\in C([a,b])$ אז לכל $x\in[a,b]$,

$$|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq \|f\|+\|g\|$$

כאשר הדבר נכון לכל $x\in[a,b]$. לכן, $\|f+g\| = \max|(f+g)(x)| \leq \|f\|+\|g\|$ ובכך הוכחנו את אי-שיוויון המשולש.

לגבי סדרה $\{f_n\}$ ב-$C([a,b])$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

אם

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\| = 0 \iff \lim_{n\to\infty}\max_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)| = 0$$

וזה בדיוק אומר ש-$f_n \to f$ במ"ש ב-$[a,b]$. סדרת קושי $\{f_n\}$ ב-$C([a,b])$ היא סדרה כזאת שלכל $\epsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שאם $m,n > n_0$ אז

$$\max_{x\in[a,b]} |f_m(x) - f_n(x)| = \|f_m - f_n\| < \epsilon$$

במונחים של אינפי 2, התנאי הנ"ל אומר ש-$\{f_n\}$ קושי במ"ש ב-$[a,b]$. מוכיחים שם שבתנאי זה קיים גבול:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

במ"ש ב-$[a,b]$ ועפ"י משפט נוסף מאינפי נסיק ש-f רציפה ב-$[a,b]$. ז"א, $f \in C([a,b])$, ו-$f_n \to f$ במ"ש. ז"א, בנורמה של $C([a,b])$, ולכן $C([a,b])$ מרחב שלם.

2. אם K מרחב האוסדורף קומפקטי מגדירים את $C(K)$ (הממשי) להיות כל הפונקציות הרציפות $f : K \to \mathbb{R}$ (והמרוכב) להיות כל הפונקציות הרציפות $f : K \to \mathbb{C}$.

פשוט ש-$C(K)$ מרחב וקטורי, והוא הופך להיות מרחב בנך ע"י הנורמה

$$\|f\| = \max_{x\in K} |f(x)|$$

3. נגדיר $P \subset C([a,b])$ להיות אוסף כל הפולינומים הממשיים. פשוט לראות ש-P תת-מרחב של $C([a,b])$ ו-$(P, \|\cdot\|_{C([a,b])})$ מרחב נורמי מעל $\mathbb{R}$, אבל מרחב זה לא שלם כי קל לבנות סדרת פולינומים $\{p_n\}$ שמתכנסת במ"ש על $[a,b]$ לפונקציה שהיא לא פולינום. למשל, אם

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

אז $p_n(x) \to e^x$ במ"ש ב-$[a,b]$ ו-e^x לא פולינום.

4. ניקח ממ"ח $(X, \mathcal{S}, \mu)$. המרחב $L^p(d\mu)$ עבור $1 \le p < \infty$ הוא מרחב כל הפונקציות $f : X \to \mathbb{R}^*$ מדידות $\mathcal{S}$ כך ש-

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right) < \infty$$

נשים לב כי $\|f\|_p$ שהגדרנו היא לא נורמה! כי אם $f(x) \equiv 0$ כב"מ ב-X אז $\|f\|_p = 0$ אף על פי ש-$f(x) \not\equiv 0$, אלא שחייבים להגדיר $L^p(d\mu)$ כמרחב של מחלקות השקילות עם התנאי:

$$f \sim g$$

אם $f(x) = g(x)$ כב"מ $d\mu$. נוכיח שאם כן, L^p מרחב בנך.

נגדיר פורמלית כעת את מרחבי L^p.

10.1 מרחבי L^p ו-ℓ^p

הגדרה 10.3 יהי $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ממ"ח. עבור $1 \le p < \infty$ מגדירים $L^p(d\mu)$ להיות אוסף כל הפונקציות המדידות $f : X \to \mathbb{R}^*\ (\mathbb{C}^*)$ כך ש-

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

הערה. נאמר ש-$f : X \to \mathbb{C}^*$ היא מדידה אם $f = u + iv$ כאשר v, u מדידות $\mathcal{S}$. כמו כן,

$$\int_X f d\mu = \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu$$

נעיר שאם $f(x) \equiv 0$ כב"מ $d\mu$ אז

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

אף על פי ש-$f \neq 0$, בסתירה לתכונה הראשונה של נורמה. פתרון לבעיה זו הוא לומר ששתי פונקציות $f, g \in L^p$ שקולות אם $f(x) = g(x)$ כב"מ. ז"א, "פונקציות" ב-L^p הן באמת מחלקות שקילות של פונקציות.

נבדוק שאומנם $L^p(d\mu)$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. ובכן, אם $f, g \in L^p$, רוצים להוכיח ש-$f + g \in L^p$. ז"א, רוצים להוכיח

$$\int_X |f + g|^p d\mu < \infty$$

ובכן, לכל $x \in X$:

$$|f(x) + g(x)| \leq 2 \cdot \max(|f(x)|, |g(x)|)$$

ולכן

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p \left[\max(|f(x)|, |g(x)|)\right]^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

הדבר נכון לכל $x \in X$ ולכן

$$\int_X |f + g|^p d\mu \leq 2^p \int_X (|f|^p + |g|^p) d\mu < \infty$$

כי נתון ש-$f, g \in L^p$. נותר להוכיח שאם $\alpha \in \mathbb{F}$ ו-$f \in L^p$ אז $\alpha f \in L^p$. אבל:

$$\int_X |\alpha f(x)|^p d\mu = \int_X |\alpha|^p |f(x)|^p d\mu = |\alpha|^p \int_X |f|^p d\mu < \infty$$

ולכן $\alpha f \in L^p$. יתר על כן,

$$\|\alpha f\|_p = \left(\int_X |\alpha f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \cdot \|f\|_p$$

לעומת זאת, תכונה 3 של נורמה לא טריוויאלית ב-L^p ונצטרך הכנות לזה.

למה 10.4 יהיו $a, b \geq 0$, ויהי $0 < \lambda < 1$. אזי,

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1 - \lambda) b$$

עם שיוויון רק עבור $a = b$.

הערה. עבור $\lambda = \frac{1}{2}$ הלמה אומרת כי $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ וזה דבר ידוע. **הוכחה.** אם $b = 0$ הלמה טריוויאלית. ואם לאו, אפשר לחלק ב-b ולקבל טענה שקולה. ז"א, שקול ל-

$$a^\lambda b^{-\lambda} \le \frac{a}{b}\lambda + (1-\lambda)$$

נציב $t = \frac{a}{b}$ והטענה היא כי לכל $t \ge 0$:

$$t^\lambda \le t\lambda + (1-\lambda)$$

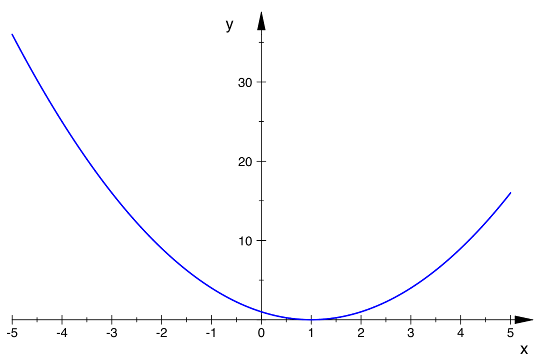
וכדי להוכיח אי-שיוויון זה נגדיר $\varphi(t) = t\lambda + (1-\lambda) - t^\lambda$, ולכן אנו רוצים להוכיח כי $\varphi(t) \ge 0$ לכל $t \ge 0$. אבל:

$$\varphi'(t) = \lambda - \lambda t^{\lambda-1} = \lambda(1 - t^{\lambda-1})$$

ולכן $\varphi'(t) = 0 \iff t = 1$. וכיוון ש-$0 < \lambda < 1$ אם $0 < t < 1$ אז $\varphi'(t) < 0$ ועבור $t > 1$, $\varphi'(t) > 0$. יתר על כן,

$$\varphi(0) = 1 - \lambda > 0$$
$$\varphi(1) = 0$$

ולכן הגרף של $\varphi(t)$ הוא:



ולכן הוכחנו ש-$\varphi(t) \ge 0$ לכל $t \ge 0$. ■

משפט 10.5 (אי-שיוויון הולדר) נניח ש-$1 < p < \infty$. נגדיר q כך ש-$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ז"א $pq = p + q$ או $q = \frac{p}{p-1}$ וגם $1 < q < \infty$. כעת, אם $f \in L^p(d\mu)$ ו-$g \in L^q(d\mu)$ אז $fg \in L^1(d\mu)$ ומתקיים

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg| d\mu \le \|f\|_p \|g\|_q$$

ויש שיוויון $\iff$ קיימים קבועים α, β כך ש-$\alpha|f(x)|^p = \beta|g(x)|^q$ כב"מ.

הוכחה. כמקרה ראשון נניח ש-$\|f\|_p = \|g\|_q = 1$.

לפי הלמה עבור $x \in X$ כלשהו כאשר $a = |f(x)|^p, b = |g(x)|^q$, $\lambda = \frac{1}{p}$, $1-\lambda = \frac{1}{q}$

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b$$

ז"א,

$$|f(x)g(x)| \leq \lambda |f(x)|^p + (1-\lambda)|g(x)|^q$$

ולכן

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q \implies$$

$$\int |fg| d\mu \leq \lambda \int_X |f|^p d\mu + (1-\lambda) \int_X |g|^q d\mu = \lambda + (1-\lambda) = 1 = \|f\|_p \|g\|_q$$

ובמקרה הכללי, אם $f \equiv 0$ או $g \equiv 0$ אז אי-שיוויון הולדר טריוויאלי. ואם לא אפשר לנרמל: נגדיר

$$F(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_p}$$

$$G(x) = \frac{g(x)}{\|g\|_q}$$

ולפי זה,

$$\|F\|_p = \left\| \frac{f}{\|f\|_p} \right\| = \frac{1}{\|f\|_p} \|f\|_p = 1$$

וכמו כן $\|G\|_q = 1$, ולפי המקרה הראשון

$$\int_X |FG| d\mu \leq \|F\|_p \|G\|_q = 1$$

ז"א,

$$\int_X \left| \frac{f}{\|f\|_p} \frac{g}{\|g\|_q} \right| d\mu \leq 1$$

ולכן

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

■

הגדרה 10.6 עבור $1 < p, q < \infty$ אומרים ש-p ו-q חזקות צמודות אם $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. מקרה פרטי של כך הוא $p = q = 2$, ובמקרה זה אי-שיוויון הולדר הוא אי-שיוויון קושי-שוורץ.

משפט 10.7 (אי-שיוויון מינקובסקי = אי-שיוויון המשולש ב-L^p) יהיו $f,g\in L^p(d\mu)$. אזי

$$\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$$

עם שיוויון $\iff$ $f(x)=cg(x)$ או $g(x)=cf(x)$ כב"מ כאשר c קבוע.

הוכחה. מתקיים:

$$\|f+g\|_p^p=\int_X|f+g|^pd\mu\le\int_X|f+g|^{p-1}\left(|f|+|g|\right)d\mu=\int_X|f+g|^{p-1}|f|d\mu+\int_X|f+g|^{p-1}|g|d\mu=I_1+I_2$$

ב-I_1 נשים לב ש-$f\in L^p$, וגם $|f+g|\in L^p$ אבל $p=(p-1)q$ (q צמוד ל-p) ולכן $|f+g|^{p-1}\in L^q$, ונפעיל את אי-שיוויון הולדר ל-I_1 לומר

$$\int_X|f+g|^{p-1}|f|d\mu\le\left[\int_X\left(|f+g|^{p-1}\right)^qd\mu\right]^{\frac{1}{q}}\left(\int_X|f|^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}}=\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}\cdot\|f\|_p$$

כמו כן,

$$I_2\le\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}\cdot\|g\|_p$$

ונסכם:

$$\|f+g\|_p^p\le\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}\cdot\left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)$$

כעת, אנו רוצים להעביר את $\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$ לצד שמאל, ואז נקבל חזקה $p-\frac{p}{q}=1$ ולכן קיבלנו

$$\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$$

■

נחבר את כל החלקים - הוכחנו שעבור $1<p<\infty$ המרחב $L^p(d\mu)$ הוא מרחב נורמי, ולגבי $L^1(d\mu)$ אי-שיוויון המשולש טריוויאלי, ולכן גם $L^1(d\mu)$ מרחב נורמי.

הערה. אפשר להגדיר $L^p(d\mu)$ גם עבור $0<p<1$ אבל אז הביטוי $\left(\int|f|^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ אינה נורמה.

גם מגדירים את $L^\infty(d\mu)$ להיות (מחלקות שקילות של) פונקציות מדידות וחסומות בעיקר[27]. הנורמה היא:

$$\|f\|_\infty=\inf\{\lambda\ge0:\mu\{x\in X:|f(x)|>\lambda\}=0\}=$$

$$=\sup\{\lambda\ge0:\mu\{x\in X:|f(x)|>\lambda\}>0\}=\inf_{g\sim f}\sup\{|g(x)|:x\in X\}$$

כאשר $f\sim g$ אומר $f(x)=g(x)$ כב"מ ($d\mu$). זה תרגיל קל להוכיח ש-L^∞ מרחב נורמי.

[27] Essentialy Bounded Functions.

מקרה פרטי חשוב. ניקח μ להיות מידת הספירה על $\mathbb{N}$. במקרה זה, $L^p(d\mu)$ הוא מרחב של סדרות, שקרוי ℓ^p. עבור $1 \le p < \infty$ וסדרה $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ מתקיים

$$\|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ועבור $p = \infty$

$$\|x\|_{\infty} = \sup_n |x_n|$$

ומתקיים כי סדרה שייכת למרחב $\iff$ הנורמה שלה סופית.

נשים לב כי אי-שיוויון הולדר לסדרות אומר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

כאשר $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. אי-שיוויון מינקובסקי לסדרות אומר עבור $1 \le p < \infty$ כי

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

כעת, המשימה הבאה היא להוכיח שמרחבי L^p שלמים. נצטרך הכנה לזה.

משפט 10.8 מרחב נורמי X הוא שלם $\iff$ כל טור ב-X שמתכנס בהחלט מתכנס. ז"א, טור $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ב-X מתכנס בהחלט אם $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ ונוכיח שזה גורר התכנסות של הטור עצמו בנורמה של X.

הוכחה. ($\Leftarrow$) תחילה נניח ש-X שלם, ונניח ש-$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. אנו רוצים להוכיח כי $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ מתכנס. ז"א, אנו רוצים להוכיח שהסכומים החלקיים

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

מתכנסים בנורמה של X לאיזה קטור $x_0 \in X$. אבל כיוון ש-X מרחב שלם מספיק להוכיח ש-$\{S_n\}$ סדרת קושי. לצורך זה, יהי $\epsilon > 0$ נתון. כיוון שטור המספרים $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ מתכנס הוא טור קושי, וקיים $k_0 \in \mathbb{N}$ כך שאם $n > m > k_0$ אז

$$\sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \epsilon$$

ונובע שאם $n > m > k_0$ אז

$$\|S_n - S_m\| = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \epsilon$$

ובזה הוכחנו ש-$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ב-X. X שלם ולכן קיים גבול

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

ולכן הטור מתכנס.

($\Rightarrow$) לצד השני נניח שכל טור ב-X שמתכנס בהחלט מתכנס, וניקח איזו סדרת קושי $\{x_n\}$ ב-X, וצריך להוכיח שהיא מתכנסת. אבל לפי תנאי קושי, קיים x_{n_1} בסדרה כך שלכל $n > n_1$, $\|x_n - x_{n_1}\| < \frac{1}{2}$. כמו כן, קיים $n_2 > n_1$ כך שלכל $n > n_2$, $\|x_n - x_{n_2}\| < \frac{1}{4}$, ואפשר להמשיך בכך, ולבנות תת-סדרה x_{n_k} כך שלכל $k \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$$

כעת נבנה טור $x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_3} - x_{n_2})$ והוא שווה ל-

$$x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$$

ולפי הבנייה, טור זה מתכנס בהחלט ולפי הנתון שלנו הוא מתכנס לאיזה $x_0 \in X$ הטור טלסקופי והסכומים החלקיים שלו בדיוק x_{n_k}. ולכן, הוכחנו

$$x_0 = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$$

ובזה מצאנו תת-סדרה של $\{x_n\}$ שמתכנסת ב-X.

כעת, אנו טוענים כי $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. לשם כך, יהי $\epsilon > 0$ נתון. כיוון ש-$\{x_n\}$ סדרת קושי, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שאם $m, n > N$ אז

$$\|x_m - x_n\| < \frac{\epsilon}{2}$$

כעת, נקבע $n > N$, ונשים לב שקיים $k_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k > k_0$ האינדקס $n_k > N$. בפרט עבור כל $k > k_0$,

$$\|x_{n_k} - x_n\| < \frac{\epsilon}{2}$$

נשאיף $k \to \infty$ ונסתמך על רציפות הנורמה. ע"מ להוכיח זאת, נוכיח שאם $x_n \to x$ ב-X אז $\|x_n\| \to \|x\|$, וזה נכון כי לכל n,

$$0 \le |\|x_n\| - \|x\|| \le \|x_n - x\|$$

ולכן, נסתמך על רציפות נורמה לומר ש-

$$\|x_0 - x_n\| = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - x_n\| \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

ובסיכום, לכל $n > N$ מתקיים כי $\|x_0 - x_n\| < \epsilon$ ונובע ש-$x_n \to x_0$, ולכן יש גבול לסדרת קושי כלשהי $\{x_n\}$, ולכן המרחב X שלם. ∎

משפט 10.9 עבור $1 \le p \le \infty$ המרחבים $L^p(d\mu)$ שלמים.

הוכחה. כאן ניתן הוכחה עבור $1 \le p < \infty$, ועבור $p = \infty$ ההוכחה יותר קלה ומושארת כתרגיל. ובכן, נקבע p כך ש-$1 \le p < \infty$, וניקח טור ב-L^p שמתכנס בהחלט. עפ"י משפט **10.8** יש רק להוכיח שהוא מתכנס ב-L^p. ובכן, הנתון הוא שלכל n, $f_n \in L^p$ ו-

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty$$

כעת, עבור כל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$, ולפי אי-שיוויון המשולש

$$\|g_n\|_p \le \sum_{k=1}^{n} \||f_k|\|_p = \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p \equiv M < \infty$$

כמו כן, ה-g_n עולים עם n ולכן לכל $x \in X$ מוגדר

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) \in [0, \infty]$$

ולפי התכנסות מונוטונית,

$$\|g\|_p^p = \int_X g^p d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n^p d\mu = \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_p^p \le M^p < \infty$$

ובפרט

$$\int_X g^p d\mu < \infty$$

ולכן $g(x) < \infty$ כב"מ ($d\mu$). לפי ההגדרה,

$$\infty > g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

ז"א, לכמעט כל x, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס בהחלט, ומוגדר היטב $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ כב"מ, ובנקודות היוצאות מן הכלל נגדיר $f(x) = 0$.

כעת, נוכיח כי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנסת ל-$f(x)$ במובן של L^p. לשם כך, לכל n נגדיר סכום חלקי $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. לפי הבנייה שלנו, $S_n(x) \to f(x)$ כב"מ. יתר על כן,

$$|S_n(x)| \le \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| = g_n(x) \le g(x)$$

וגם

$$|f(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |f_n(x)| = g(x)$$

ומתקיים $S_n - f \to 0$ כב"מ. ואנחנו צריכים להוכיח ש-

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |S_n - f|^p d\mu = 0$$

אבל לפי השלבים לעיל לכמעט כל x מתקיים $|S_n(x)-f(x)|^p \le [2g(x)]^p$ ו-$\int_X g^p d\mu \le M^p$ כפי שהוכחנו לעיל. ונקבל ש-

$$|S_n - f|^p \to 0$$

בצורה נשלטת ונוכל להסיק ממשפט ההתכנסות הנשלטת כי:

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |S_n - f|^p d\mu = \int_X 0 d\mu = 0$$

ולכן f $\to$ S_n ב-L^p או במילים אחרות, $\sum f_n(x) = f(x)$ במובן של L^p, ומכאן נובע ש-$L^p(d\mu)$ מרחב שלם עבור $1 \le p < \infty$. ■

הערה 10.10 (מתוך ההוכחות)

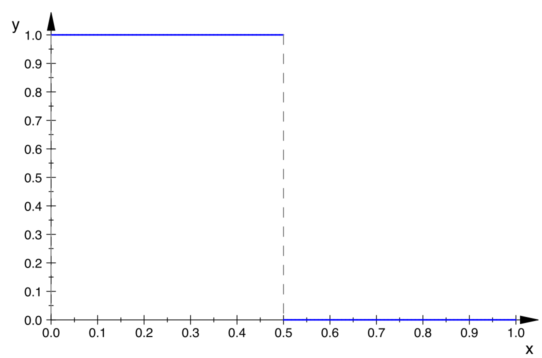
אם $f_n \to f$ ב-L^p ו-$1 \le p < \infty$ אז יש תת-סדרה $f_{n_k} \to f$ כב"מ ב-X.

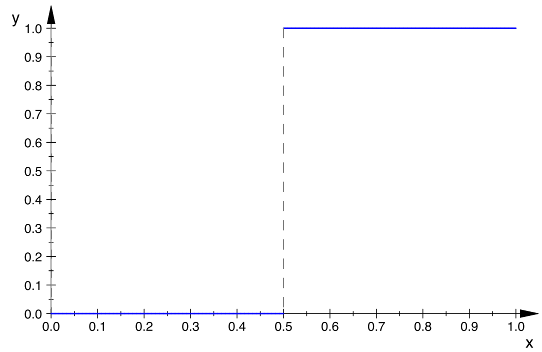
דוגמאות.

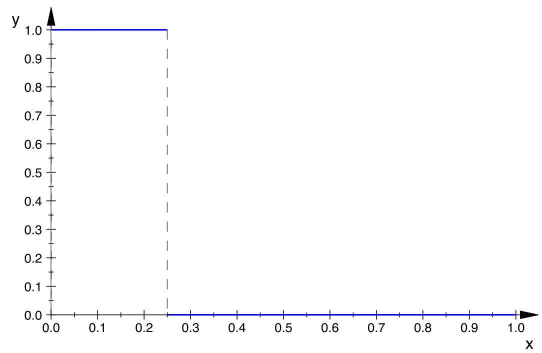
1. נשתמש במידת לבג dm על $[0,1]$. עבור $1 \le p < \infty$ נבנה סדרה $f_n \in L^p(dm)$ כך ש-$f_n \in L^p(dm)$ כך ש-$f_n \to 0$ במובן של L^p אבל $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ אינו קיים באף נקודה של $[0,1]$. וככן, נרשום $n = 2^k + L$ עבור $k \in \mathbb{N}$ ו-$0 \le L < 2^k$ טבעי, ונגדיר

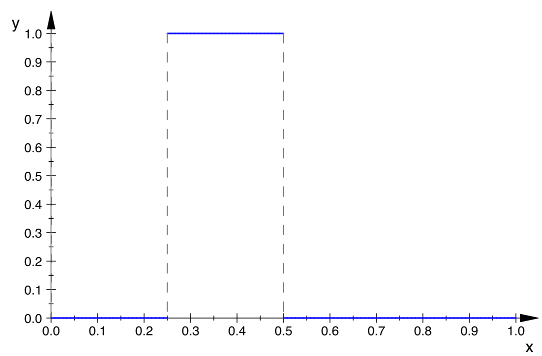
$$f_n(x) = I_{\left[\frac{L}{2^k}, \frac{L+1}{2^k}\right]}(x)$$

למשל, להלן דוגמאות של f_2, f_3, f_4, f_5 בהתאמה:







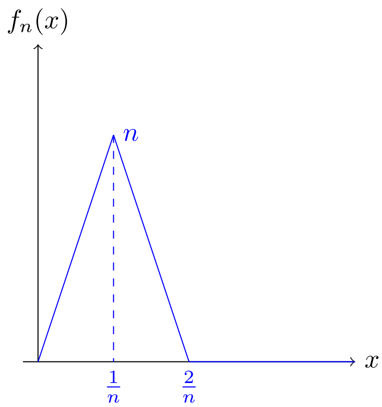


יוצא שלכל $x \in [0,1]$, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המכילה ∞ אפסים ו-∞ אחדים. כן, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ אינו קיים. אבל אם $n = 2^k + L$ אז

$$\|f_n - 0\|_{L^p}^p = \int_{[0,1]} |f_n|^p dm = \frac{1}{2^k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ולכן $f_n \to 0$ ב-L^p, $1 \le p < \infty$. ב-L^∞ הסדרה f_n מתבדרת כי לכל n $\|f_n - 0\| = \text{esssup} f_n = 1 \not\to 0$

2. דוגמת המשולשים:



לכל $x \in [0,1]$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ אבל עבור L^1

$$\|f_n - 0\|_{L^1} = \int_0^1 |f-0|dm = \int_0^1 f(x)dx = 1 \not\to 0$$

10.2 טרנספורמציות ליניאריות

הגדרה 10.11 יהיו X, Y שני מרחבים נורמים מעל שדה $\mathbb{F}$. טרנספורמציה (או אופרטור) ליניארי $T : X \to Y$ היא טרנספורמציה המקיימת:

$$T(x_1 + cx_2) = T(x_1) + cT(x_2)$$

קל להוכיח שכל טרנספורמציה ליניארית $\mathbb{R}^n$ או $\mathbb{C}^n$ רציפה בנורמה האוקלידית. במרחבים נורמים ממימד ∞ יש הרבה דוגמאות של טרנספורמציות ליניאריות ולא רציפות.

דוגמא. נגדיר $X = C([0,1])$, כלומר, $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ is continuous}\}$, ו-

$$\|f\| = \max_{0\le x\le 1} |f(x)|$$

נגדיר $C' \subset C([0,1])$ להיות תת המרחב של $C([0,1])$ המכיל את הפונקציות בעלות נגזרת רציפה עם הנורמה של $C([0,1])$. נגדיר $T : C' \to \mathbb{R}$ ע"י $T(f) = f'(0)$. פשוט לראות ש-T ליניארית. T לא רציפה כי אם נגדיר $f_n \in C'$ ע"י $f_n(x) = \frac{\sin(n^2x)}{n}$ אז $f_n \to 0$ במ"ש ב-$[0,1]$ ולכן במובן של הנורמה $f_n \to 0$. אבל $f_n'(x) = n\cos(n^2x)$, $f_n'(0) = n$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty} T(f_n) = \lim_{n\to\infty} f_n'(0)$$

אינו קיים.

הגדרה 10.12 יהיו X,Y מרחבים נורמים מעל $\mathbb{F}$, ותהי $T:X\to Y$ ליניארית. נגדיר את הנורמה של T ע"י

$$\|T\| = \sup_{0\neq x\in X}\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\|_Y$$

כאשר השיוויון השני מושאר כתרגיל. אם $\|T\|<\infty$ אומרים ש-T חסומה אם $\|T\|=M<\infty$ אז לכל $x\in X$: $\|Tx\|\le M\|x\|$.

משפט 10.13 יהיו X,Y מרחבים נורמים מעל $\mathbb{F}$, ותהי $T:X\to Y$ טרנספורמציה ליניארית. אזי, הטענות הבאות שקולות.

1. T חסומה.
2. T רציפה במ"ש על כל X.
3. T רציפה בנקודה אחת $x_0\in X$.
4. T רציפה באפס.

הוכחה. ($1 \implies 2$) נתון כי $\|T\|=M<\infty$. אם כן, לכל $x_1,x_2\in X$:

$$\|T(x_1)-T(x_2)\| = \|T(x_1-x_2)\| \le M\|x_1-x_2\|$$

וזה תנאי ליפשיץ שגורר רציפות במ"ש.

($2 \implies 3$) טריוויאלי.

($3 \implies 4$) נתון ש-T רציפה ב-x_0. רוצים להוכיח כי T רציפה ב-0. לצורך זה ניקח סדרה $\{x_n\}\subset X$ כך ש-$x_n\to 0$. צריך להוכיח ש-$T(x_n)\to T(0)=0$. ובכן, כיוון ש-$x_n\to 0$ אז $x_n+x_0\to x_0$ ונתון ש-T רציפה ב-x_0 ולכן

$$T(x_0+x_n)\to T(x_0)$$

ז"א,

$$T(x_0)+T(x_n)\to T(x_0)$$

ונעביר אגב להסיק ש-$T(x_n)\to 0$ ולכן T רציפה ב-0.

($4 \implies 1$) כיוון ש-T רציפה ב-0, קיים $\delta>0$ כך שאם $\|x\|<\delta$, אז $\|Tx\|<1$. כעת, ניקח $0\neq x\in X$ כלשהו, ונגדיר

$$z=\frac{\delta x}{2\|x\|}$$

ולכן $\|z\|=\frac{\delta}{2}<\delta$, וממילא $\|Tz\|<1$. ז"א,

$$\left\|T\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right)\right\|<1$$

שקול ל-

$$\left\|\frac{\delta}{2\|x\|}Tx\right\|<1 \iff \frac{\delta}{2\|x\|}\|Tx\|<1 \iff \|Tx\|<\frac{2}{\delta}\|x\|$$

■

11 מרחבי מכפלה פנימית ומרחבי הילברט

הגדרה 11.1 מכפלה סקלרית (מכפלה פנימית) על מרחב וקטורי X היא פונקציה $(\,,\,) : X \times X \to \mathbb{F}$ כך שלכל $x, y, z \in X$ ו-$\alpha \in \mathbb{F}$, מתקיים:

1. $(y, x) = \overline{(x, y)}$.
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.
4. $(x, x) \geq 0$ עם שוויון רק עבור $x = 0$.

מסקנה 11.2 תוצאות מיידיות להגדרה הן:

1. בעזרת סעיפים 1 ו-2 $\Longleftarrow$ $(z, x + y) = (z, x) + (z, y)$.
2. בעזרת 1 ו-3 $\Longleftarrow$ $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$.
3. לכל $x \in X$, $(x, 0) = (0, x) = 0$, וזה נובע מ-3.

הגדרה 11.3 X יחד עם מכפלה פנימית $(\,,\,)$ נקרא מרחב מכפלה פנימית, ממ"פ.

הגדרה 11.4 יהי X ממ"פ. לכל $x \in X$ נגדיר $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$. הוכיחו כבר באלגברה ליניארית שזאת נורמה אמיתית.

משפט 11.5 (אי-שיוויון קושי שוורץ) יהי X ממ"פ. אזי לכל $x, y \in X$:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

מסקנה 11.6 מן המשפט לעיל נובע $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$[28].

הוכחה. דרך המלך להוכיח זאת היא:

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(x, y) + \|y\|^2 \leq$$

$$\leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

ובכך הוכחנו את אי-שיוויון המשולש. ■

הערה 11.7 תוך כדי ההוכחה ראינו דבר שימושי:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(x, y)$$

הערה נוספת היא כי המכפלה הפנימית **רציפה** במובן זה שאם $x_n \to x, y_n \to y$ בתוך X אז $(x_n, y_n) \to (x, y)$. ההוכחה תרגיל.

[28] אי-שיוויון המשולש.

משפט 11.8 (משפט המקבילית) יהי X מרחב מכפלה פנימית, ויהיו $x, y \in X$ וקטורים. אזי,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

הוכחה. מתקיים:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(x,y) + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}(x,y)$$

■

מה שיפה במשפט **11.8** הוא שזו טענה רק על הנורמה, אבל ההוכחה תלויה באופן עקרוני בזה שהנורמה מושרית ע"י מכפלה פנימית. נובע מיד שאם Y מרחב נורמי שבו משפט המקביליות אינו נכון, אז אי-אפשר להגדיר על Y מכפלה פנימית שתשרה את הנורמה. **גם ההפך נכון:** אם משפט **11.8** מתקיים ב-Y אז אפשר להגדיר על Y מכפלה פנימית שמשרה את הנורמה.

הגדרה 11.9 מרחב מכפלה פנימית שלם[29] נקרא מרחב הילברט.

דוגמאות.

1. $\mathbb{R}^n$ או $\mathbb{C}^n$ עם המכפלה הפנימית הקלאסית: אם $x = (x_1, \dots x_n)$ ו-$y = (y_1, \dots, y_n)$ אז

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

2. $\ell^2=$ מרחב כל הסדרות $x = (x_n)$ כך ש-

$$\|x\|_{\ell^2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} < \infty$$

עבור $x = (x_n), y = (y_n) \in \ell^2$, מוגדר $(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ וכבר הוכחנו שזה מרחב שלם, ולכן מרחב הילברט.

3. אם $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ממ"ח אז $L^2(d\mu)$ מרחב הילברט ע"י מכפלה פנימית:

$$(f,g) = \int_X f \overline{g} d\mu$$

הערה. עבור $p \neq 2$ $L^p(d\mu)$ (וגם $L^\infty(d\mu)$) אינם מרחבי הילברט, וקל לבדוק שבהם משפט **11.8** נכשל. גם $C(K)$ לא מרחב הילברט.

דוגמא. ב-ℓ^2 נגדיר תת-מרחב

$$S = \{x = (x_n) \in \ell^2 : x_n \neq 0 \text{ for a finite number of } n\text{'s}\}$$

אז S תת-מרחב של ℓ^2, אבל הוא לא סגור כי למעשה $S \subsetneq \ell^2 = \overline{S}$.

[29] במטריקה המושרית ע"י הנורמה.

משפט 11.10 יהי $\mathcal{H}$ מרחב הילברט ויהי $M \subset \mathcal{H}$ תת-מרחב סגור. אם $x \in \mathcal{H} \setminus M$, אז קיים $y \in M$ יחיד כך ש-$\|x-y\|$[30] מינימלי מתוך

$$\{\|z-x\| : z \in M\}$$

ויתר על כן $x-y$ אורגוגונלית ל-M במובן שלכל $z \in M$:

$$(x-y, z) = 0$$

הוכחה. נגדיר $0 < d = dist(x, M) = \inf\{\|x-z\| : z \in M\}$[31]. לפי הגדרת ה-inf, קיימת סדרה $\{y_n\} \subset M$ כך ש-

$$\lim_{n\to\infty} \|x-y_n\| = d$$

כעת, נוכיח כי $\{y_n\}$ סדרת קושי. עבור $m, n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\|y_m - y_n\|^2 = \|(y_m - x) + (x - y_n)\|^2 = 2\|y_m - x\|^2 + 2\|y_n - x\|^2 - \|y_m + y_n - 2x\|^2$$

כיוון ש-$y_m, y_n \in M$ גם $\frac{y_m+y_n}{2} \in M$. נובע ש-

$$\left\|\frac{y_m+y_n}{2} - x\right\| \geq d$$

ולכן

$$\|y_m + y_n - 2x\|^2 \geq 4d^2$$

נחזור למעלה:

$$\|y_m - y_n\|^2 \leq 2\|y_m - x\|^2 + 2\|y_n - x\|^2 - 4d^2$$

ולפי הבחירה של $\{y_m\}$,

$$\lim_{m\to\infty} \|y_m - x\|^2 = d$$

ולכן

$$\lim_{m,n\to\infty} \|y_m - y_n\|^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$$

ואז זה מוכיח את הטענה ש-$\{y_m\}$ קושי. כיוון ש-$\mathcal{H}$ מרחב הילברט ולכן שלם, קיים גבול

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n$$

וכיוון שכל $y_n \in M$ ו-M סגור, גם $y \in M$. וכיוון שהנורמה רציפה,

$$\|y-x\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n - x\| = d$$

[30] השווה ל-$\mathrm{dist}(x, y)$.
[31] כיוון ש-M סגור ו-$x \in M$, $0 < d$.

ולכן $\|x-y\|$ מינימלי.

כעת, נוכיח כי y **יחיד.** אם קיים $w \in M$ כך ש-$d=\|w-x\|$, נפעיל אי-שיוויון לעיל (עבור y_n, y_m במקרה של w ו-y לומר:

$$\|w-y\|^2 \le 2\|w-x\|^2 + 2\|y-x\| - 4d^2 = 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$$

ז"א $w=y$ ו-y יחיד.

כעת, נוכיח כי $x-y$ אורתוגונלי ל-M. מספיק להוכיח שאם $z \in M$ ואם $\|z\|=1$, אז $(x-y,z)=0$. ובכן, אם $\alpha \in \mathbb{F}$ אז

$$dist(x, y+\alpha z) \ge dist(x,y)$$

שכן $dist(x,y)$ הוא מינימום. ז"א,

$$\|x-y\|^2 \le \|x-(y+\alpha z)\|^2 = \|(x-y)-\alpha z\|^2 = \|x-y\|^2 + \|\alpha z\|^2 + 2\mathrm{Re}\overline{\alpha}(x-y,z)$$

$$= \|x-y\|^2 + |\alpha|^2 - 2\mathrm{Re}\overline{\alpha}(x-y,z)$$

כאשר ידוע ש-$\|z\|=1$. ז"א, $2\mathrm{Re}\overline{\alpha}(x-y,z) \le |\alpha|^2$. כעת נבחר $\alpha=(x-y,z)$ ונסיק עבור אותו α:

$$2|\alpha|^2 = 2\mathrm{Re}\overline{\alpha}(x-y,z) \le |\alpha|^2$$

ולכן $\alpha=0$, ולכן $(x-y,z)=0$. ■

משפט 11.11 (משפט ההצגה של ריס) יהי $\mathcal{H}$ מרחב הילברט ויהי $y \in \mathcal{H}$ וקטור כלשהו. נגדיר $f_y : \mathcal{H} \to \mathbb{F}$ ע"י $f_y(x)=(x,y)$. אזי f_y ליניארי וחסום ומתקיים

$$\|f_y\| = \|y\|_{\mathcal{H}}$$

ולהיפך: אם $f:\mathcal{H}\to\mathbb{F}$ ליניארי וחסום אז קיים $y\in\mathcal{H}$ יחיד כך ש-$f=f_y$.

הוכחה. תחילה נקח $y \in \mathcal{H}$ כלשהו ונגדיר $f_y(x)=(x,y)$. f_y ליניארי כי

$$f_y(x_1+cx_2) = (x_1+cx_2,y) = (x_1,y)+c(x_2,y) = f_y(x_1)+cf_y(x_2)$$

כעת, f_y חסום כי לכל $x\in\mathcal{H}$:

$$|f_y(x)| = |(x,y)| \le \|y\|\cdot\|x\|$$

בזה הוכחנו ש-f_y חסום ו-$\|f_y\| \le \|y\|_{\mathcal{H}}$. כעת, אם $y=0$, $f_y=0$ ו-$\|f_y\|=0=\|y\|_{\mathcal{H}}$, ואם $y\neq 0$ הרי

$$\|f_y\| \ge \frac{|f_y(y)|}{\|y\|} = \frac{|(y,y)|}{\|y\|} = \frac{\|y\|^2}{\|y\|} = \|y\|$$

ונובע ש-$\|y\|_{\mathcal{H}} = \|f_y\|$. מצד שני, אם $f:\mathcal{H}\to\mathbb{F}$ ליניארי ורציף, ייתכן ש-$f\equiv 0$ ואז $f=f_0$. אבל אם $f\not\equiv 0$ נגדיר

$$\ker(f) = M \subsetneq \mathcal{H}$$

וכיוון ש-f ליניארי, $M=\ker(f)$ תת-מרחב של $\mathcal{H}$, וכיוון ש-f רציף $M=f^{-1}(\{0\})$, וסגור כתמונה הפוכה של קבוצה סגורה. וכיוון ש-$\mathcal{H}\neq M$ קיים $w\in\mathcal{H}\backslash M$. נסתמך על משפט **11.10** לבחור $u\in M$ קרוב ביותר ל-w. לכן $(u-w)\perp M$. עוד נגדיר וקטור יחידה

$$z=\frac{u-w}{\|u-w\|}\perp M$$

בהכרח $M\not\ni z\neq 0$ ולכן $f(z)\neq 0$. כעת, ניקח $x\in\mathcal{H}$ כלשהו ונעיר שהוקטור

$$\underbrace{f(x)}_{\in\mathbb{F}}\underbrace{z}_{\in\mathcal{H}}-\underbrace{f(z)}_{\in\mathbb{F}}\underbrace{x}_{\in\mathcal{H}}\in M$$

ואם כן

$$0=(f(x)z-f(z)x,z)=(f(x)z,z)-(f(z)x,z)=f(x)\underbrace{(z,z)}_{=1}-(x,\overline{f(z)}z)$$

ז"א, אם $y=\overline{f(z)}z$ קיבלנו לכל $x\in\mathcal{H}$ ש-$f(x)=(x,y)=f_y(x)$, ונותר להוכיח ש-y יחיד. אבל אם קיים $y_1\in\mathcal{H}$ כך ש-$f(x)=(x,y_1)$, אז לפי הבנייה $f(x)=(x,y)$, ויוצא ש-

$$(x,y-y_1)=f(x)-f(x)=0$$

לכל $x\in\mathcal{H}$, ועבור $x=y-y_1$ נקבל ש-

$$0=(x,y-y_1)=(y-y_1,y-y_1)=\|y-y_1\|^2$$

ולכן $y=y_1$ ובכך השלמנו את ההוכחה. ∎

11.1 משפט רדון ניקודים

נחזור לתורת המידה. נניח ש-$(X,\mathcal{S})$ מרחב מדיד ו-μ מידה על $(X,\mathcal{S})$. כבר ראינו שלכל $f\geq 0$ מדידה $\mathcal{S}$ ההגדרה

$$\nu(E)=\int_E fd\mu$$

מגדירה מידה חדשה ν על $(X,\mathcal{S})$. נעיר שאם $E\in\mathcal{S}$ מקיימת $\mu(E)=0$ אז בהכרח

$$\nu(E)=\int_E fd\mu=0$$

הגדרה 11.12 יהיו μ,ν שתי מידות על $(X,\mathcal{S})$. אומרים ש-ν רציפה בהחלט ביחס ל-μ[32] אם לכל $E\in\mathcal{S}$ כך ש-$\mu(E)=0$ גם $\nu(E)=0$.

לעיל הוכחנו שאם $\nu(E)=\int_E fd\mu$ אז $\nu\ll\mu$.

[32] מסומן $\nu\ll\mu$.

משפט 11.13 (רדון ניקודים) יהי $(X,\mathcal{S})$ מרחב מדיד, ויהיו μ,ν שתי מידות על $(X,\mathcal{S})$ שהן סופיות σ, ו-$\nu \ll \mu$.
אז קיים $f \geq 0$ מדידה $\mathcal{S}$ כך שלכל $E \in \mathcal{S}$,

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

הגדרה 11.14 יהיו μ ו-ν שתי מידות על $(X,\mathcal{S})$. נאמר שהן סינגולריות הדדית[33], ומסומן $\mu\perp\nu$ אם $X = E_1 \uplus E_2$, ושתיהן מדידות ו-

$$\mu(E_1) = \nu(E_2) = 0$$

(ובמילים: μ "חי" על E_2 ו-ν "חי" על E_1)

משפט 11.15 (משפט הפירוק של לבג) יהיו μ ו-ν שתי מידות על $(X,\mathcal{S})$ שהן σ סופיות. אזי קיים פירוק $\nu = \nu_a + \nu_s$ כאשר $\nu_a \ll \mu$ ו-$\nu_s\perp\mu$ וגם $\nu_a\perp\nu_s$.

המתמטיקאי המפורסם פון ניומן מצא הוכחה לשני המשפטים הנ"ל ביחד עפ"י משפט ההצגה של ריס.

[33]באנגלית Mutually Singular.