מבנים אלגבריים 1

תרגיל 3

<u>תאריכי הגשה ונהלים</u>: שבוע ממועד התרגול בו ניתן התרגיל אליו נרשמתם. הגשת התרגיל לידי המתרגל בלבד. יש לרשום על התרגילים שם מלא, ת.ז ואת מספר הקבוצה.

תזכורת:
1) סדר של איבר $a \in G$ הוא המספר הטבעי <u>המינימלי</u> n כך ש- $a^n = 1$.
2) כאשר נרשום ת"ח הכוונה לתת-חבורה.

<u>שאלה 1</u>

א) תהי S קבוצה, $A = P(S)$ קבוצת החזקה (ז"א A – היא קבוצה שכל איבר בה הוא תת-קבוצה של S). נגדיר פעולה על A כך: $a \cdot b = a \cap b$. האם $(A, \cdot)$ הוא מונואיד? חבורה?.

ב) מצאו מונואיד $(X, *)$ עם אינסוף איברים כך שעבור כל איבר $a^2 = a,\ a \in X$ (כאשר- $a^2 := a * a$).

ג) נגדיר על אוסף המספרים הממשיים פעולה חדשה $a \circ b := a + b + a \cdot b$. הוכח שהמבנה המתקבל הינו מונואיד, מדוע זו אינה חבורה?

<u>שאלה 2</u>

א) מצאו את כל סדרי האיברים ב- $(Z_{12}, +)$.

ב) מצאו את כל סדרי האיברים ב- $(U_{12}, \cdot)$ (חבורת האיברים ההפיכים כפלית ב- Z_{12}^*).

<u>שאלה 3</u>

יהי a איבר מסדר אינסופי בחבורה G. הוכיחו כי אם $m \neq n$ אז $a^m \neq a^n$.

<u>שאלה 4</u>

תנו דוגמא נגדית לטענות (השגויות) הבאות:

א) אם x,y איברים בחבורה $(G,*)$ ו- $\langle x \rangle \neq \langle y \rangle$ אז $|x*y| = |x|\cdot|y|$.

ב) תהי G חבורה מסדר זוגי. אם $x^3=y^3$ אז $x=y$.

ג) תהי G חבורה אבלית מסדר n. אז קיים איבר מסדר n ב-G.

ד) כל חבורה שבה $a^2=e$ לכל a, היא סופית.

<u>שאלה 5</u>

א)

נגדיר $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in Z_3 \right\}$ (כאשר $Z_3 = \{0,1,2\}$ עם פעולות החיבור והכפל מודולו 3).

הוכיחו כי G חבורה ביחס לפעולת כפל מטריצות, מצאו את הסדר של G ואת הסדר של כל איבר ב G.

ב) תהי G חבורה. אם לכל $a,b \in G$ מתקיים $(ab)^3 = a^3b^3$ האם בהכרח G אבלית?

ג) תהי G חבורה. אם לכל $a,b \in G$ מתקיים $(ab)^2 = a^2b^2$ האם בהכרח G אבלית?

* ד) תהי G חבורה. אם לכל $a,b \in G$ מתקיים $(ab)^k = a^kb^k$ עבור $k=3,4,5$. הוכיחו ש- G אבלית.

בהצלחה!