חשבון אינפיניטסימלי 3 - תרגיל מס' 4

יובל חצ'טריאן

27 בנובמבר 2017

1. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות (בכל נקודה בה הן מודרות).
   (א) $f(x,y)=x^3+3y^2-\frac{x}{y}$.
   (ב) $f(x,y)=e^{\cos xy}$.
   (ג) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
   (ד) $f(x,y,z)=\ln\left(x^3+y^3-z^3\right)$.

2. בדקו את הדיפרנציאביליות של הפונקציות הבאות במישור:
   (א) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.
   (ב) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.
   (ג) $f(x,y)=\ln(x^4+y^6+1)$.
   (ד) $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\frac{y^2}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$

3. נגדיר נגזרת בכיוון הווקטור h על ידי $\frac{\partial f}{\partial k}(a)$ כאשר $k=\frac{h}{\|h\|}$. חשבו את הנגזרת של f בכיוון הווקטור h בנקודה a.
   (א) $f(x,y)=x\sin(x+y)$, $h=(-1,0)$, $a=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.
   (ב) $f(x,y,z)=xy^2z^3$, $h=(4,3,0)$, $a=(3,2,1)$.

4. 0 בשאלה הקרובה יסמן את וקטור האפס. הוכיחו או הרפיכו את הטענות הבאות:
   (א) אם f חסומה בסביבה של 0, אזי $f(x)\|x\|$ רציפה בסביבה של 0.
   (ב) אם f חסומה בסביבה של 0, אזי $f(x)\|x\|$ רציפה ב0.
   (ג) אם f חסומה בסביבה של 0, אזי $f(x)\|x\|$ דיפרנציאבילית בסביבה של 0.
   (ד) אם f חסומה בסביבה של 0, אזי $f(x)\|x\|$ דיפרנציאבילית 0.
   (ה) אם f חסומה בסביבה של 0, אזי $f(x)\|x\|^2$ דיפרנציאבילית בסביבה של 0.
   (ו) אם f חסומה בסביבה של 0, אזי $f(x)\|x\|^2$ דיפרנציאבילית ב 0.
   (ז) אם f חסומה בסביבה של 0, אזי ל $f(x)\|x\|^{k+1}$ קיימות ורציפות הנגזות עד סדר k ב 0.

5. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

(א) תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית. אזי לכל v מוגדרת הנגזרת לפי וקטור $\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)$ ומתקיים

$$\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)=\nabla f\left(a\right)v.$$

(ב) תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה כך ש ∇f מוגדרת ב a וכך שקיימת נגזרת לפי וקטור v לכל $v\in\mathbb{R}^n$ ומתקיים

$$\nabla f\left(a\right)v=\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right).$$

(ג) תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה כך ש ∇f מוגדרת ב a, f רציפה ב a וקיימת נגזרת לפי וקטור v לכל $v\in\mathbb{R}^n$ ומתקיים

$$\nabla f\left(a\right)v=\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right).$$

אזי f דיפרנציאבילית ב a.

6. תהי f פונקציה דיפרנציאבילית בסביבה של $(0,0)$. נגדיר

$$h\left(x,y\right)=\begin{cases}f\left(x,y\right) & xy>0\\ 0 & xy\leq 0\end{cases}$$

מצאו תנאי הכרחי ומספיק על f_x,f_y,f לכך ש h תהיה דיפרנציאבילית ב $(0,0)$.

7. תהיינה f,g פונקציות דיפרנציאביליות בנקודה $(0,0)$. נגדיר

$$h\left(x,y\right)=\begin{cases}f\left(x,y\right) & xy>0\\ g\left(x,y\right) & xy\leq 0\end{cases}.$$

מצאו תנאי הכרחי ומספיק על g_y,g_x,g,f_y,f_x,f לכך ש h תהיה דיפרנציאבילית ב $(0,0)$.