

בוחן מתמטיקה בדידה, חורף תשע"ט

10.12.2018 / ב' טבת תשע"ט

מתרגל: אחיה בר־און.

• כתבו בדף הראשון את שמכם והת.ז. שלכם בצורה ברורה.

• הקפידו על סדר וניקיון.

• משך הבוחן: שעה וחצי.

• ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.

• נמקו כל תשובה.

• בבוחן 3 שאלות.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות עליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

1	
2	
3	
total	

בהצלחה!

ענו על השאלות הבאות:

1. (15 נק' לסעיף) הוכיחו/הפריכו את הבאים:

(א) הפסוק $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q)$ שקול לוגית לפסוק $p \leftrightarrow q$.
פתרון: הוכחה. נסתכל על טבלת אמת הבאה,

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	F	T

רואים כי לשני הפסוקים אותה טבלת אמת ולכן הם שקולים לוגית.

(ב) לכל שלוש קבוצות $U \supseteq A, B$ מתקיים $A \Delta B = A^c \Delta B^c$ (כאשר A^c המשלים של A ביחס ל- U).
פתרון: הוכחה. לכל x מתקיים כי

$$\begin{aligned} x \in A \Delta B &\iff \\ x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) &\iff \\ (x \in A \setminus B) \vee (x \in B \setminus A) &\iff \\ ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in B) \wedge (x \notin A)) &\iff \\ ((x \notin A^c) \wedge (x \in B^c)) \vee ((x \notin B^c) \wedge (x \in A^c)) &\iff \\ (x \in B^c \setminus A^c) \vee (x \in A^c \setminus B^c) &\iff \\ x \in (B^c \setminus A^c) \cup (A^c \setminus B^c) &\iff \\ x \in A^c \Delta B^c & \end{aligned}$$

(ג) לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים $((A \cup C) \setminus B) \subseteq ((A \cap B) \cup (C \setminus B))$.
פתרון: הפרכה. נגדיר

$$\begin{aligned} B &:= \emptyset \\ C &:= \emptyset \\ A &:= \{1\} \end{aligned}$$

$$B := (A \cap B) \cup (C \setminus B) = \emptyset \text{ ואז } (A \cup C) \setminus B = \{1\}$$

2. (15 נק' לסעיף) תהא $A := (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. נגדיר יחס $\sim$ מעל A ע"י הכלל

$$(x, y) \sim (x', y') \iff (xx' > 0) \wedge (yy' > 0).$$

(א) הוכיחו כי $\sim$ מהווה יחס שקילות מעל A .
פתרון:

• רפלקסיביות: לכל $(x, y) \in A$ מתקיים כי $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ולכן x, y ממשיים שונים מאפס. מכאן ש $(x, y) \sim (x, y)$ ולכן $(xx = x^2 > 0) \wedge (yy = y^2 > 0)$ כנדרש.

- סימטריות: יהיו $(x, y), (x', y') \in A$ כך ש $(x, y) \sim (x', y')$. מכאן ש $(xx' > 0) \wedge (yy' > 0)$.
ולכן גם $(x'x > 0) \wedge (y'y > 0)$. מכאן ש $(x', y') \sim (x, y)$. כנדרש.
- טרנזיטיביות: יהיו $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in A$ כך ש $(x, y) \sim (x', y')$ וגם $(x', y') \sim (x'', y'')$.
מכאן ש $(xx' > 0) \wedge (yy' > 0)$ וגם $(x'x'' > 0) \wedge (y'y'' > 0)$. מצירוף שני הדברים (כפל של דברים חיוביים הוא חיובי) נסיק ש

$$(xx'x'' > 0) \wedge (yy'y'' > 0)$$

כיוון ש $x'x' > 0$ וגם $y'y' > 0$ נוכל לחלק בהם (ללא שינוי בכיוון האי שיוון) ונקבל ש $(xx'' > 0) \wedge (yy'' > 0)$ ולכן גם $(x, y) \sim (x'', y'')$. כנדרש.

(ב) מצאו כמה איברים יש בקבוצת המנה $A/\sim$. **פתרון**: נשים לב שהיחס $\sim$ מחלק לנו את A ל 4 "רבעים" לפי הסימן של כל קורדינאטה. באופן פורמלי - טענה:

$$A/\sim = \{[(1, 1)]_\sim, [(-1, 1)]_\sim, [(1, -1)]_\sim, [(-1, -1)]_\sim\}$$

הוכחה: ההכלה $(\supseteq)$ ברורה. נוכיח $(\subseteq)$. תהא $[(x, y)]_\sim$ מחלקת שקילות (כלומר איבר ב $A/\sim$) כאשר $(x, y) \in A$. כעת יש 4 אפשרויות:

- אם $(x > 0) \wedge (y > 0)$ אז $(1 \cdot x > 0) \wedge (1 \cdot y > 0)$ ולכן $(1, 1) \sim (x, y)$ ולכן $[(1, 1)]_\sim = [(x, y)]_\sim$.
- אם $(x < 0) \wedge (y > 0)$ אז $(-1 \cdot x > 0) \wedge (1 \cdot y > 0)$ ולכן $(-1, 1) \sim (x, y)$ ולכן $[(-1, 1)]_\sim = [(x, y)]_\sim$.
- אם $(x > 0) \wedge (y < 0)$ אז $(1 \cdot x > 0) \wedge (-1 \cdot y > 0)$ ולכן $(1, -1) \sim (x, y)$ ולכן $[(1, -1)]_\sim = [(x, y)]_\sim$.
- אם $(x < 0) \wedge (y < 0)$ אז $(-1 \cdot x > 0) \wedge (-1 \cdot y > 0)$ ולכן $(-1, -1) \sim (x, y)$ ולכן $[(-1, -1)]_\sim = [(x, y)]_\sim$.

3. נגדיר $A_1 := \mathbb{N}$, וכן, לכל n טבעי חיובי, נגדיר

$$A_{n+1} := A_n \setminus \{a \cdot (n+1) \mid a \in A_n\}$$

(א) (5 נק') חשבו את A_2 .

פתרון: נחשב

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 \setminus \{a \cdot 2 \mid a \in A_1\} \\ &= \mathbb{N} \setminus \{2a \mid a \in \mathbb{N}\} \\ &= \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

קבוצת האי-זוגיים הטבעיים.

(ב) (10 נק') חשבו את A_3 .

פתרון: לפי הגדרה

$$A_3 = A_2 \setminus \{a \cdot 3 \mid a \in A_2\}$$

כלומר A_3 היא קבוצת האי-זוגיים הפרש עם הקבוצה $\{3 \cdot (2k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$ שהיא קבוצת המספרים האי זוגיים שהם כפולה של 3. לכן נקבל כי A_3 היא קבוצת האי-זוגיים הטבעיים שאינם מתחלקים ב 3. במילים אחרות

$$A_3 = \{n \in \mathbb{N} : (2 \nmid n) \wedge (3 \nmid n)\}$$

תיאור אפשרי אחר הוא כזה: $n \in A_3$ אמ"מ השארית בחלוקה ב 6 היא 1 הוא 5 (השאריות 0, 2, 4 לא יכולים להיות כי n אי זוגי ושארית 3 לא יכולה להיות כי n לא מתחלק ב 3) לכן

$$A_3 = \{6k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{6k + 5 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

(ג) (15 נק') הוכיחו כי לכל n טבעי חיובי מתקיים $1 \in A_n$.

פתרון : נוכיח באינדוקציה:

בסיס $n = 1$: אכן, לפי הגדרה $1 \in A_1 = \mathbb{N}$

צעד: נניח נכונות הטענה n טבעי חיובי כלשהוא, כלומר $1 \in A_n$ ונוכיח את הטענה עבור $n + 1$. כלומר נוכיח כי $1 \in A_{n+1}$. אכן, לפי הגדרה $A_{n+1} = A_n \setminus \{a \cdot (n + 1) \mid a \in A_n\}$ בגלל הנחת האינדוקציה כי $1 \in A_n$ מספיק להוכיח כי $1 \notin \{a \cdot (n + 1) \mid a \in A_n\}$. כיוון ש n טבעי חיובי, $2 \leq n + 1$ ולכן לכל $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ מתקיים כי $2 \leq 2a \leq a(n + 1)$ ולכן $a(n + 1) \neq 1$. בנוסף, עבור $a = 0$ נקבל כי $a(n + 1) = 0 \neq 1$ ולכן לכל $a \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a(n + 1) \neq 1$ ובפרט זה נכון לכל $a \in A_n \subseteq \mathbb{N}$.

(ד) (10 נק') חשבו את $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

פתרון : נראה כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{1\}$.

($\supseteq$) מסעיף קודם נקבל כי לכל n טבעי חיובי מתקיים כי $1 \in A_n$ ולכן $1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

($\subseteq$) יהא $t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, כלומר לכל n טבעי חיובי מתקיים כי $t \in A_n$. בפרט מתקיים כי $t \in A_2$ ולכן $t \neq 0$. נניח בשלילה כי $t \neq 1$ ונקבל כי $2 \leq t$. כעת כיוון ש $t \in A_{t-1}$ נקבל כי

$$t \in \{a \cdot t \mid a \in A_{t-1}\} = \{a \cdot ((t - 1) + 1) \mid a \in A_{t-1}\}$$

מכיוון ש $1 \in A_{t-1}$ (לפי סעיף קודם). מכאן נקבל כי

$$t \notin A_{t-1} \setminus \{a \cdot ((t - 1) + 1) \mid a \in A_{t-1}\} = A_t$$

בסתירה לנתון.

בהצלחה!

תשובה לשאלה/סעיף _____

תשובה לשאלה/סעיף _____

תשובה לשאלה/סעיף _____

תשובה לשאלה/סעיף _____

תשובה לשאלה/סעיף _____

תשובה לשאלה/סעיף _____

תשובה לשאלה/סעיף _____