נוסחת טיילור מקלורן

הפיתוח מהרצאה 1 כאשר $x_0 = 0$ נקרא **פיתוח מקלורן**, ובמקרה כללי **פיתוח טיילור**.

דוגמה

$$f(x) = e^x$$

הפונקציה גזירה אינסוף פעמים בכל $\mathbb{R}$ ו $f^{(n)} = e^x$ – לכל $n \in \mathbb{N}$, לכן $f^{(n)}(0) = 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$. עפ״י פיתוח טיילור, לכל $0 < x$ קיים $0 < c < x$ כך ש :

$$e^x = \overbrace{1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot x^n}^{\text{פיתוח טיילור}} + \overbrace{\frac{e^c}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}}^{\text{השגיאה}}$$

עבור $x = 1$:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \overbrace{r}^{\text{שגיאה}=:}$$

$$|r| = \frac{e^c}{(n+1)!} \overset{0<c<1,\ 2<e<3}{\leq} \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

עבור $n = 5$:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$$

$$2.7166 < e < 2.7166 + \frac{1}{240} = 2.7207$$

<u>הערה</u> : כך מחשבונים מחשבים את e.

באופן דומה ניתן לקרב, למשל, את $\tan(23.75)$.

מסקנה

$$e \notin \mathbb{Q}$$

הוכחה

נניח בשלילה כי $e \in \mathbb{Q}$. לכן, קיימים $m, k \in \mathbb{N}$ כך ש :

$$e = \frac{m}{k}$$

לכן:

$$e=\frac{m}{k}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!} \quad , \quad 0<c<1$$

נכפיל ב - $k\cdot n!$, ונקבל:

$$k\cdot n!\cdot\frac{e^c}{(n+1)!}\in\mathbb{Z}$$

אבל:

$$0<\frac{k\cdot e^c}{n+1}\le\frac{k\cdot e}{n+1}\overset{\text{לבסוף}}{<}1$$

סתירה.

$\blacksquare$

הערה

לא תמיד פיתוח טיילור מקלורן מועיל בחישוב.

דוגמה

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

באינדוקציה על $n\in\mathbb{N}$, נקבל:

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

כאשר $P_n(t)$ הוא פולינום ב - t ממעלה $3\cdot n$.

לכן: $f^{(n)}(0)=0$, לכן בפיתוח טיילור מקלורן סביב $x_0=0$ נקבל:

$$f(x)=0+0+0+\cdots+0+r(x)=r(x)$$

לכן לפיתוח אין ערך.

$\blacksquare$

חקירת פונקציות

הבסיס המתמטי העומד מאחורי חקירת פונקציות

הגדרה

פונקציה $f(x)$ היא:

- **עולה ממש** אם לכל $a<b$ בתחום הפונקציה: $f(a)<f(b)$.
- **עולה** אם לכל $a<b$ בתחום הפונקציה: $f(a)\leq f(b)$.
- **קבועה** אם לכל $a<b$ בתחום הפונקציה: $f(a)=f(b)$.
- **יורדת** אם לכל $a<b$ בתחום הפונקציה: $f(a)\geq f(b)$.
- **יורדת ממש** אם לכל $a<b$ בתחום הפונקציה: $f(a)>f(b)$.

למה

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע פתוח או סגור.

- f עולה בקטע $\Leftrightarrow$ $0\leq f'(x)$.
- f קבועה בקטע $\Leftrightarrow$ $0=f'(x)$.
- f יורדת בקטע $\Leftrightarrow$ $0\geq f'(x)$.

הוכחה

$\boxed{\Leftarrow}$

עפ"י הגדרת הנגזרת.

נניח כי f עולה בקטע.

$$f'_{+}(x)=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0$$

$$f'_{-}(x)=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)\geq 0$$

ההוכחה עבור f יורדת בקטע דומה.

אם f קבועה בקטע אזי f עולה וגם יורדת, לכן: $f'(x)\geq 0 \wedge f'(x)\leq 0$, אזי: $f'(x)=0$.

$\boxed{\Longrightarrow}$

עפ״י משפט הערך הממוצע (לגרנז׳).

נניח כי $f'(x) \geq 0$ בקטע.

יהיו $a < b$ בקטע. אזי, קיים $a < c < b$ כך ש :

$$\frac{f(b) - f(a)}{\underbrace{b - a}_{>0}} = \overbrace{f'(c)}^{\geq 0}$$

$$\Downarrow$$

$$f(b) - f(a) \geq 0 \implies f(a) \leq f(b)$$

לכן f עולה בקטע.

ההוכחה עבור $f'(x) \leq 0$ בקטע דומה.

ההוכחה עבור $f'(x) = 0$ בקטע נובעת.

ההוכחה עבור קטע סגור דומה, ובנוסף יש לבדוק בנפרד את הקצוות.

$\blacksquare$

הערה

הלמה הנ״ל אינה נכונה עבור $f(x)$ עולה ממש ו - $f'(x) > 0$ או $f(x)$ יורדת ממש ו - $f'(x) < 0$.

לדוגמה, $f(x) = x^3$ עולה ממש אך $f'(0) = 0$.

למה

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע פתוח או סגור.

- f עולה ממש בקטע $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ ו – $f'(x)$ אינה מתאפסת בתת קטע שלם של הקטע הנתון.
- f יורדת ממש בקטע $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$ ו – $f'(x)$ אינה מתאפסת בתת קטע שלם של הקטע הנתון.

הוכחה

עבור f עולה ממש (המקרה השני דומה).

החלק הראשון של הלמה נובע מהלמה הקודמת.

<u>טענה</u>: תהי $f(x)$ פונקציה עולה. אזי $f(x)$ אינה עולה ממש $\Leftrightarrow$ קיים קטע עליו $f(x)$ קבועה.

$\Leftarrow$: קיים קטע עליו $f(x)$ קבועה, לכן $f(x)$ אינה עולה ממש בקטע הנ"ל, ובפרט בקטע הנתון.

$\Rightarrow$: $f(x)$ אינה עולה ממש, לכן קיימים $a<b$ כך ש: $f(a)\geq f(b)$. $f(x)$ עולה, לכן $f(a)\leq f(b)$, לכן: $f(a)=f(b)$.

לכל $a<x<b$: $f(a)\leq f(x)\leq f(b)=f(a)$, לכן: $f(x)=f(a)$, לכן $f(x)$ קבועה בקטע $[a,b]$.

תרגיל: הסק מהטענה את הדרוש בלמה.

■

הגדרה

תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע נתון.

- נקודה c בקטע היא **נקודת מקסימום מקומי** אם קיימת סביבה של הנקודה c בה לכל x: $f(x)\leq f(c)$.
- נקודה c בקטע היא **נקודת מינימום מקומי** אם קיימת סביבה של הנקודה c בה לכל x: $f(x)\geq f(c)$.
- נקודה c בקטע היא **נקודת אקסטרמום (נקודת קיצון)** אם היא נקודת מקסימום מקומי או נקודת מינימום מקומי.

תזכורת (<u>משפט פרמה</u>)

אם c נקודת קיצון ו - $f'(c)$ קיימת, אזי $f'(c)=0$.

ממשפט פרמה נובע שנקודות הקיצון הן בהכרח נקודות בהן $f'(c)$ לא מוגדר או אפס.

דוגמה

- 0 אינה נקודת קיצון של x^3, למרות שהנגזרת שם שווה 0.

- 0אינה נקודת קיצון של $f(x)=\begin{cases} x\cdot sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, למרות שהנגזרת שם לא קיימת.
- 0 נקודת קיצון של $f(x)=|x|$, למרות שהנגזרת שם לא קיימת.

מסקנה

תהי $f(x)$ רציפה בסביבת נקודה c וגזירה בסביבה המנוקבת. אזי:

1. אם $f'(x)\leq 0$ בסביבה ימנית של c ו $f'(x)\geq 0$ – בסביבה שמאלית של c, אזי c נקודת מינימום.
2. אם $f'(x)\geq 0$ בסביבה ימנית של c ו $f'(x)\leq 0$ – בסביבה שמאלית של c, אזי c נקודת מקסימום.
3. אם הסימן של $f'(x)$ קבוע ושונה מאפס בסביבה של c, אזי c נקודת קיצון.

הוכחה

1. נתבונן בסביבה של הנקודה c שהיא איחוד הסביבות הנתונות, או מוכלת בהן, יחד עם הנקודה c.
   יהי $x\neq c$ שם.
   אם x בסביבה הימנית, משום ש - $f'(x)\leq 0$ שם, עפ"י למה קודמת $f(x)$ עולה שם, לכן $f(c)\leq f(x)$.
   אחרת, בסביבה x השמאלית, ומשום ש - $f'(x)\geq 0$ שם, עפ"י למה קודמת $f(x)$ יורדת שם, לכן $f(c)\leq f(x)$.
   לכן, c נקודת מינימום.
2. באופן דומה להוכחת 1.
3. אם הסימן של $f'(x)$ חיובי שם, עפ"י למה קודמת $f(x)$ עולה ממש שם, לכן c איננה נקודת קיצון.
   באופן דומה עבור סימן שלילי.

■

הערה

הנחת הרציפות במסקנה הנ"ל הכרחית.

לדוגמה: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.