פתרון מועד א' אינפי 2 תשע"ט

29 ביולי 2019

נכון/לא נכון

1. הטענה לא נכונה. הפולינום במכנה הוא אי־פריק ממעלה שנייה, התשובה תהיה עם $\arctan$, מה הקשר $\ln 3$...אם ממש פותרים (השלמה לריבוע והכל) מקבלים שהאינטגרל שווה ל־$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

2. הטענה נכונה. בכל קטע ממשי, לא משנה כמה קטנצ'יק, יש מספר רציונלי, ובכל חלוקה נבחר רציונלי בכל קטע ונקבל סכום רימן:

$$\int = \lim \sum f\left(c_i\right) \Delta x_i = \lim \sum c \Delta x_i = \lim c \sum \Delta x_i = c\left(b-a\right)$$

סכום האורכים הוא $b-a$.

3. הטענה לא נכונה. אפשר להסתכל, למשל, באינטגרל: $\int_1^\infty \sin\left(x^2\right) dx$ שיתכנס לפי דיריכלה אחרי הצבה $t=x^2$, אבל $\lim_{x\longrightarrow\infty} \sin\left(x^2\right)$ לא קיים.

4. הטענה לא נכונה. לפי הנוסחה, האורך הוא:

$$L = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\right)^2} dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x}} dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} \sqrt{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right)_{x=0}^{x=\ln 2} = \frac{3}{4}$$

חוץ מזה, הפונקציה עולה כאשר $x \geq 0$; אפשר לשים לב שאם הולכים במקביל לצירים (כלומר דרך הנקודה $(\ln 2, 1)$), המרחק הוא $\ln 2 + 0.25 < \frac{3}{2}$, אז בוודאי שאורך העקומה קטן מ־$\frac{3}{2}$.

5. הטענה נכונה. $\sum \left|\frac{e^{\sin(nx)}}{n^2}\right| \leq \sum \frac{e}{n^2}$ לכל $x \in \mathbb{R}$, הטור הימני מתכנס ולכן לפי ויירשטראס הטור השמאלי מתכנס במ"ש. הפונקציות בטור רציפות ולכן גם הטור הוא פונקציה רציפה.

6. הטענה לא נכונה. $R_1 = R_2$. אפשר לעשות אחד מהמבחנים (שורש או מנה), אפשר גם לשים לב שהטור f_2 הוא טור הנגזרות של f_1 שהכפלנו ב־x: $f_2 = xf_1'$, ואנחנו יודעים שגזירה איבר־איבר של טור חזקות לא משנה את רדיוס ההתכנסות...

7. הטענה נכונה. נרשום את טור מקלורן של הפונקציה:

$$x^2 \sin\left(x^3\right) = x^2 \sum \frac{(-1)^n \left(x^3\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum \frac{(-1)^n x^{6n+5}}{(2n+1)!}$$

אנו יודעים שהמקדם של x^{49} הוא $\frac{f^{(49)}(0)}{n!}$. בטור שפתחנו x^{49} לא מופיע, כלומר המקדם שלו הוא 0, ולכן $f^{(49)}(0) = 0$.

8. הטענה נכונה. זה פשוט הטור של $\sin$ שהצבנו בו π, ואנו יודעים ש: $\sin(\pi) = 0$ (אני מקווה).

9. הטענה לא נכונה. התנאי המספיק שראינו בהרצאה הוא שהנגזרות השניות רציפות, לא דיפרנציאביליות. הסתכלו, למשל, על $f(x,y) = \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}$ בראשית.

10. הטענה נכונה. מכיוון שהפונקציה דיפ', הנגזרת הכיוונית בכיוון v היא $\nabla f(x_0,y_0) \cdot v$. אם v_1, v_2, v_3 הם הכיוונים השונים, לפחות שניים מהם לא מקבילים (אולי אחד הוא נגדי של השני). שני וקטורים לא מקבילים במישור פורשים אותו - כל וקטור v אפשר להציג כ: $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$. לכן, $\nabla f(x_0,y_0) \cdot v = 0$ לכל v ולכן $\nabla f(x_0,y_0) = 0$.

שאלות פתוחות

1. נשתמש ברמז. אנו יודעים ש: $F'(x) = f(x)$, ולכן אם נציב $t = F(x)$, $dt = f(x)\,dx$. מה קורה לגבולות? אם $x \longrightarrow \infty$ אז $t = F(x) \longrightarrow \infty$, לפי הנתון שהאינטגרל $\int_0^\infty f(x)\,dx$ מתבדר. מצד שני, אם $x = 1$ אז $t = F(1) = \int_0^1 f(x)\,dx$ שזה מספר סופי כי f רציפה ולכן אינטגרבילית והכל טוב. נקבל:

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{F(x)} dx = \int_{F(1)}^\infty \frac{1}{t} dt$$

וזה אינטגרל שאנו יודעים שמתבדר.

2. (א) $x = 0$ היא נקודה בעייתית. נפצל לשני אינטגרלים: $\int_0^1 + \int_1^\infty$. נתבונן באינטגרל $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2} dx$. בתחום $[0,1]$ הפונקציה אי־שלילית, לכן אפשר להשתמש במבחן ההשוואה. נשווה עם $\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ולכן האינטגרל $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2}dx$ מתכנס אם ורק אם האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ מתכנס. אנו יודעים שהאינטגרל השני לא מתכנס, ולכן גם האינטגרל שלנו לא מתכנס.

(ב) $x = 1$ נקודה בעייתית. שוב נפצל לתחומים, ואפשר להשוות גבולית עם $\int_0^1 \frac{1}{x-1}dx$, שמתבדר, ולכן גם האינטגרל שלנו מתבדר.

(ג) האינטגרל מתכנס, לפי דיריכלה – $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ מונוטונית יורדת לאפס וגזירה כמה פעמים שצריך והפונקציה $G(x) = \int_1^x \sin t dt = -\cos t + \cos 1$ חסומה וכו'.

3. הטור של $f'(x)$ הוא טור הנגזרות של הטור של f, רק צריך לנמק למה מותר לגזור איבר־איבר. ראשית, מכיוון ש־n טבעי הפונקציות $\left(\frac{1}{n}\right)^x$ גזירות (והנגזרות הן $-\frac{\ln n}{n^x}$). שנית, קיימת נקודה בקטע $[a,\infty)$ שבה הטור $f(x) = \sum \left(\frac{1}{n}\right)^x$ מתכנס, למשל $x = 2$ (תכלס הוא מתכנס בכל נקודה). לבסוף, יש להראות שטור הנגזרות מתכנס במ"ש. מתקיים:

$$\left|-\frac{\ln n}{n^x}\right| \le \frac{\ln n}{n^a}$$

לכל x בקטע, ולכן לפי ויירשטראס נשאר להסביר למה הטור $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ מתכנס. אפשר לנמק זאת יפה עם סדרי גודל, למשל לומר שקיים n שהחל ממנו: $\ln n \le n^{\frac{a-1}{2}}$ ואז: $\sum \frac{\ln n}{n^a} \le \sum \frac{n^{\frac{a-1}{2}}}{n^a} = \sum \frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$, הטור הימני מתכנס ולכן גם השמאלי. אפשר גם להשתמש במבחן העיבוי כדי להיפטר מהלוגריתם.

4. ראשית, נחפש נקודות חשודות בתוך התחום – נשווה את הנגזרות החלקיות ל־0:

$$\begin{cases} 0 = f_x = 2x \\ 0 = f_y = 4y - 4 \end{cases}$$

מה שנותן לנו נקודה חשודה אחת – $(0,1)$.

שנית, נחפש נקודות חשודות על שפת התחום: $g(x,y) = x^2 + y^2 - 9 = 0$. משוואות לגראנז' הן:

$$\begin{cases} 2x = \lambda \cdot 2x \\ 4y - 4 = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה, $x = 0$ או $\lambda = 1$.

אם $x = 0$, מהמשוואה השלישית נקבל $y = \pm 3$, ושתי נקודות חשודות: $(0, \pm 3)$.

אם $\lambda = 1$, מהמשוואה השנייה נקבל: $4y - 4 = 2y$ כלומר $y = 2$. נציב זאת במשוואה השלישית ונקבל: $x^2 + 4 = 9$ כלומר $x = \pm\sqrt{5}$ ושתי נקודות: $\left(\pm\sqrt{5}, 2\right)$.

נציב בפונקציה: $f(0,1) = -2,\ f\left(\pm\sqrt{5},2\right) = 5,\ f(0,3) = 6,\ f(0,-3) = 30$, לכן $(0,1)$ המינימום המוחלט בתחום, $(0,-3)$ המקסימום המוחלט.

5. אנחנו רוצים לבצע קודם dx כי האינטגרל $\int e^{\frac{x}{y}}dy$ לא מיידי. לכן, נציג את התחום באופן הבא. אם $\sqrt{x} \le y \le 1$ וגם $0 \le x \le 1$, אז $0 \le x \le y^2$ וגם $0 \le y \le 1$.
מפה לשם:

$$\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dxdy = \int\limits_0^1 ye^{\frac{x}{y}}\Big|_{x=0}^{x=y^2}\,dy = \int\limits_0^1 \left(ye^y - y\right)dy = \int\limits_0^1 y\left(e^y - 1\right)dy$$

בחלקים: $u = y, v' = e^y - 1$, נקבל:

$$= y\cdot\left(e^y - y\right)\big|_{y=0}^{y=1} - \int\limits_0^1 1\cdot\left(e^y - y\right)dy = e-1-\left(e^y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} = e-1-\left(e - \frac{1}{2} - (1-0)\right) = \frac{1}{2}$$