פתרון תרגיל 9 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ו

18 במאי 2016

1. פרמטריזציה של החרוט היא: $r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, ku)$.
וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u = (\cos v, \sin v, k), r_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$$

ראינו בעבר שהנורמל הוא:

$$\frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(-k\cos v, -k\sin v, 1)$$

וקטורי הנגזרות של הנורמל הם:

$$\vec{n}_u = 0 = 0\cdot r_u + 0\cdot r_v$$

$$\vec{n}_v = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(k\sin v, -k\cos v, 0) = 0\cdot r_u + \frac{-k}{u\sqrt{1+k^2}}\cdot r_v$$

לכן:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{u\sqrt{1+k^2}} \end{pmatrix}$$

2. נתבונן במשטח סיבוב הנתון על ידי הפרמטריזציה:

$$r(\theta,\phi) = (f(\phi)\cos\theta, f(\phi)\sin\theta, \phi)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$r_\theta = (-f(\phi)\sin\theta, f(\phi)\cos\theta, 0), r_\phi = (f'(\phi)\cos\theta, f'(\phi)\sin\theta, 1)$$

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$r_{\theta\theta}=\left(-f\left(\phi\right)\cos\theta,-f\left(\phi\right)\sin\theta,0\right),r_{\theta\phi}=\left(-f'\left(\phi\right)\sin\theta,f'\left(\phi\right)\cos\theta,0\right)$$

$$r_{\phi\phi}=\left(f''\left(\phi\right)\cos\theta,f''\left(\phi\right)\sin\theta,0\right)$$

נחשב את הנורמל:

$$r_{\theta}\times r_{\phi}=\left|\begin{array}{ccc} i & j & k\\ -f\left(\phi\right)\sin\theta & f\left(\phi\right)\cos\theta & 0\\ f'\left(\phi\right)\cos\theta & f'\left(\phi\right)\sin\theta & 1 \end{array}\right|=\left(f\left(\phi\right)\cos\theta,f\left(\phi\right)\sin\theta,-f'\left(\phi\right)f\left(\phi\right)\right)$$

ננרמל:

$$\left\Vert r_{\theta}\times r_{\phi}\right\Vert =\sqrt{f^{2}\left(\phi\right)\cos^{2}\theta+f^{2}\left(\phi\right)\sin^{2}\theta+\left(-f'\left(\phi\right)f\left(\phi\right)\right)^{2}}=f\left(\phi\right)\sqrt{1+\left(f'\left(\phi\right)\right)^{2}}$$

ובסך הכל:

$$\vec{n}=\frac{r_{\theta}\times r_{\phi}}{\left\Vert r_{\theta}\times r_{\phi}\right\Vert }=\frac{1}{\sqrt{1+\left(f'\left(\phi\right)\right)^{2}}}\left(\cos\theta,\sin\theta,-f'\left(\phi\right)\right)$$

לכן:

$$G=\left(\begin{array}{cc} f^{2}\left(\phi\right) & 0\\ 0 & 1+\left(f'\left(\phi\right)\right)^{2} \end{array}\right)$$

כמו כן:

$$L_{11}=r_{\theta\theta}\cdot\vec{n}=-\frac{f\left(\phi\right)}{\sqrt{1+\left(f'\left(\phi\right)\right)^{2}}}$$

$$L_{12}=L_{21}=r_{\theta\phi}\cdot\vec{n}=0$$

$$L_{22}=r_{\phi\phi}\cdot\vec{n}=\frac{f''\left(\phi\right)}{\sqrt{1+\left(f'\left(\phi\right)\right)^{2}}}$$

כלומר:

$$B=\left(\begin{array}{cc} -\frac{f\left(\phi\right)}{\sqrt{1+\left(f'\left(\phi\right)\right)^{2}}} & 0\\ 0 & \frac{f''\left(\phi\right)}{\sqrt{1+\left(f'\left(\phi\right)\right)^{2}}} \end{array}\right)$$

ולכן:

$$W=-G^{-1}B=\frac{1}{\sqrt{1+\left(f'\left(\phi\right)\right)^{2}}}\left(\begin{array}{cc} -\frac{1}{f\left(\phi\right)} & 0\\ 0 & \frac{f''\left(\phi\right)}{1+\left(f'\left(\phi\right)\right)^{2}} \end{array}\right)$$

כעת, אם המשטח מינימלי, $H = \frac{1}{2} trW = 0$, כלומר:

$$\frac{f''(\phi)}{1+(f'(\phi))^2} = \frac{1}{f(\phi)}$$

אם $f'(\phi) = 0$ נקבל ש: $f(\phi) \longrightarrow \infty$ ולכן זהו גליל עם רדיוס אינסופי, כלומר מישור (מישור xz).

אחרת, נכפיל את שני האגפים ב- $2f'(\phi)$ ונקבל:

$$\frac{2f'(\phi) f''(\phi)}{1+(f'(\phi))^2} = \frac{2f'(\phi)}{f(\phi)}$$

כלומר:

$$\left(\ln\left(1+(f'(\phi))^2\right)\right)' = 2(\ln(f(\phi)))'$$

נגזרות לוגריתמיות. נבצע אינטגרציה על שני האגפים ונקבל:

$$1+(f'(\phi))^2 = C^2 f^2(\phi)$$

C^2 הוא קבוע האינטגרציה. אם כן:

$$\frac{df}{d\phi} = f'(\phi) = \sqrt{C^2 f^2(\phi) - 1}$$

ולכן:

$$\frac{df}{\sqrt{C^2 f^2(\phi) - 1}} = d\phi$$

נבצע החלפת משתנים: $g = Cf$ ונקבל:

$$\frac{dg}{C\sqrt{g^2-1}} = d\phi$$

שוב, נבצע אינטגרציה על שני האגפים:

$$\int \frac{dg}{\sqrt{g^2-1}} = \int C d\phi$$

כלומר:

$$arccoshg = C\phi + B$$

ולכן:

$$g = \cosh(C\phi + B)$$

ובסך הכל:

$$f(\phi) = \frac{1}{C}\cosh(C\phi + B)$$

וזהו אכן קטנואיד.

3. נתבונן במטריקות של הקטנואיד (פשוט; משטח סיבוב של $x = k\cosh\frac{z}{k}$ למשל):

$$G = \begin{pmatrix} \cosh^2\frac{\phi}{k} & 0 \\ 0 & k^2\cosh^2\frac{\phi}{k} \end{pmatrix}$$

ושל ההליקואיד:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+k^2 \end{pmatrix}$$

בצורה הבאה:

$$\cosh^2\frac{\phi}{k}d\theta^2 + k^2\cosh^2\frac{\phi}{k}d\phi^2, du^2 + \left(u^2+k^2\right)dv^2$$

אם נבצע החלפת משתנים: $u = k\sinh\frac{\phi}{k}, k = k$ נקבל את הדרוש.

4. פרמטריזציה של המשטח היא:

$$r\left(u,v\right) = \left(u, v, f\left(u\right) + g\left(v\right)\right)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u = \left(1, 0, f'\left(u\right)\right), r_v = \left(0, 1, g'\left(v\right)\right)$$

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$r_{uu} = \left(0, 0, f''\left(u\right)\right), r_{uv} = \left(0, 0, 0\right), r_{vv} = \left(0, 0, g''\left(v\right)\right)$$

נחשב את הנורמל:

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f'\left(u\right) \\ 0 & 1 & g'\left(v\right) \end{vmatrix} = \left(-f'\left(u\right), -g'\left(v\right), 1\right)$$

ננרמל:

$$\left\|r_u \times r_v\right\| = \sqrt{1 + \left(f'\left(u\right)\right)^2 + \left(g'\left(v\right)\right)^2}$$

ולכן:

$$\vec{n} = \frac{r_u \times r_v}{\left\|r_u \times r_v\right\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(f'\left(u\right)\right)^2 + \left(g'\left(v\right)\right)^2}}\left(-f'\left(u\right), -g'\left(v\right), 1\right)$$

אם כן:

$$G = \begin{pmatrix} 1 + \left(f'\left(u\right)\right)^2 & f'\left(u\right)g'\left(v\right) \\ f'\left(u\right)g'\left(v\right) & 1 + \left(g'\left(v\right)\right)^2 \end{pmatrix}$$

וגם:

$$B=\frac{1}{\sqrt{1+\left(f'\left(u\right)\right)^{2}+\left(g'\left(v\right)\right)^{2}}}\left(\begin{array}{cc} f''\left(u\right) & 0\\ 0 & g''\left(v\right)\end{array}\right)$$

נקבל:

$$W=-\left(\begin{array}{cc} \frac{f''(u)\left(1+\left(g'(v)\right)^{2}\right)}{\left(1+(f'(u))^{2}+(g'(v))^{2}\right)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-f'(u)g'(v)g''(v)}{\left(1+(f'(u))^{2}+(g'(v))^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\\ \frac{-g'(v)f'(u)f''(u)}{\left(1+(f'(u))^{2}+(g'(v))^{2}\right)^{\frac{3}{2}}} & \frac{g''(v)\left(1+\left(f'(u)\right)^{2}\right)}{\left(1+(f'(u))^{2}+(g'(v))^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\end{array}\right)$$

לפיכך:

$$K=\frac{f''\left(u\right)g''\left(v\right)}{\left(1+\left(f'\left(u\right)\right)^{2}+\left(g'\left(v\right)\right)^{2}\right)}$$

$$H=-\frac{g''\left(v\right)\left(1+\left(f'\left(u\right)\right)^{2}\right)+f''\left(u\right)\left(1+\left(g'\left(v\right)\right)^{2}\right)}{2\left(1+\left(f'\left(u\right)\right)^{2}+\left(g'\left(v\right)\right)^{2}\right)}$$

5. פרמטריזציה של המשטח היא:

$$r\left(u,v\right)=\left(u,v,f\left(u\right)+g\left(v\right)\right)$$

כאשר $f\left(u\right)=\frac{u^{2}}{a^{2}},g\left(v\right)=\frac{v^{2}}{b^{2}}$.

בשאלה הקודמת חישבנו את העתקת וויינגרטן במקרה זה.

אצלנו:

$$f'\left(u\right)=\frac{2u}{a^{2}},f''\left(u\right)=\frac{2}{a^{2}},g'\left(v\right)=\frac{2v}{b^{2}},g''\left(v\right)=\frac{2}{b^{2}}$$

אנו רוצים ש: $W=k\cdot I$, כלומר: $B=kG$. נקבל:

$$G=\left(\begin{array}{cc} 1+\frac{4u^{2}}{a^{4}} & \frac{4uv}{a^{2}b^{2}}\\ \frac{4uv}{a^{2}b^{2}} & 1+\frac{4v^{2}}{b^{2}}\end{array}\right)$$

$$B=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4u^{2}}{a^{4}}+\frac{4v^{2}}{b^{2}}}}\left(\begin{array}{cc} \frac{2}{a^{2}} & 0\\ 0 & \frac{2}{b^{2}}\end{array}\right)$$

ולכן:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4u^{2}}{a^{4}}+\frac{4v^{2}}{b^{2}}}}\left(\begin{array}{cc} \frac{2}{a^{2}} & 0\\ 0 & \frac{2}{b^{2}}\end{array}\right)=k\left(\begin{array}{cc} 1+\frac{4u^{2}}{a^{4}} & \frac{4uv}{a^{2}b^{2}}\\ \frac{4uv}{a^{2}b^{2}} & 1+\frac{4v^{2}}{b^{4}}\end{array}\right)$$

מכאן, אפשר לראות ש: $uv = 0$. כלומר, $u = 0$ או $v = 0$.

אם $u = 0$, נקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} k = \frac{\frac{2}{a^2}}{\sqrt{1+\frac{4v^2}{b^2}}} \\ k\left(1 + \frac{4v^2}{b^4}\right) = \frac{\frac{2}{b^2}}{\sqrt{1+\frac{4v^2}{b^2}}} \end{cases}$$

העקמומיות תהיינה: $k = \frac{2b}{a^3}$, וגם:

$$v = \pm\frac{1}{2}b\sqrt{|a^2 - b^2|}$$

באופן דומה, אם $v = 0$ נקבל שהעקמומיות תהיינה $k = \frac{2a}{b^3}$, וגם:

$$u = \pm\frac{1}{2}a\sqrt{|a^2 - b^2|}$$

ולכן יש לנו בסך הכל 4 נקודות אמביליות:

$$\left(\pm\frac{1}{2}a\sqrt{|a^2 - b^2|}, 0\right), \left(0, \pm\frac{1}{2}b\sqrt{|a^2 - b^2|}\right)$$