1. א. הטור חיובי. נבצע מבחן השוואה גבולי עם הטור החיובי $\sum\frac{1}{n^2}$:

$$\frac{\frac{1}{(n+2)(n+4)}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{n^2}{(n+2)(n+4)}\to 1$$

כלומר הטורים חברים, אז כיוון ש-$\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס (טור-p עם $p>1$) אז גם הטור שלנו

מתכנס. (פתרון חלופי בשאלה 2, שם גם מוצאים את סכום הטור)

ב. $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$, לכן לפי מבחן השוואה ראשון, כיוון ש-$\sum\frac{1}{n}$ מתבדר, אז גם $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ מתבדר.

ג. באופן כללי מתקיים לכל $a,b>0$ כי $a^{\ln(b)}=b^{\ln(a)}$, לכן הטור שלנו הוא בעצם

$$\sum\frac{1}{n^{\ln(2)}}$$

וזהו טור-p עם $p\leq 1$ ולכן מתבדר.

ד. נשים לב כי הטור הוא טור חיובי כי לכל $n\geq 2$ טבעי $\pi<\frac{\pi}{n^2}<0$ כלומר $\sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)>0$. מתקיים

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{n^2})}{n^2}<\frac{1}{n^2}$$

ולכן לפי מבחן השוואה ראשון עם הטור החיובי המתכנס $\sum\frac{1}{n^2}$ (טור-p עם $p>1$) גם הטור שלנו מתכנס.

ה. נשים לב כי $8\leq\cos(n)+7\leq 6$ וכן $3\leq 2-\sin(n)\leq 1$ לכן בפרט הטור חיובי, וכן מתקיים

$$\frac{\cos(n)+7}{(2-\sin(n))n}>\frac{6}{3n}=\frac{2}{n}$$

לכן לפי מבחן השוואה ראשון עם הטור המתבדר $\sum\frac{2}{n}=2\sum\frac{1}{n}$ גם הטור שלנו מתבדר.

ו. נבצע מבחן השוואה גבולי עם הטור $\sum\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$:

$$\frac{\frac{\sqrt{9n^4+20n+1}\sqrt[6]{n^5}}{(1+2n)^4}}{\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}}=\frac{n^2\sqrt{9n^4+20n+1}}{(1+2n)^4}=\frac{\sqrt{9+\frac{20}{n^3}+\frac{1}{n^4}}}{\left(\frac{1}{n}+2\right)^4}\to\frac{\sqrt{9}}{2^4}=\frac{3}{16}$$

קיבלנו גבול ממשי וחיובי, ולכן הטורים שלנו הם חברים, ולכן מהתכנסות הטור $\sum \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ מקבלים כי הטור שלנו גם הוא מתכנס.

2. בדומה לטורים טלסקופיים אחרים שראינו, גם כאן נוכל למצוא את הסכום: קודם כל,

$$\frac{1}{(n+2)(n+4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+4)-(n+2)}{(n+2)(n+4)} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4})$$

כעת נסתכל על הסס"ח,

$$S_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4})$$

כל איבר שלילי מבטל את האיבר שמופיע 3 מקומות אחריו, וכך מתבטלים כל האיברים מלבד האיבר הראשון והשלישי מההתחלה והראשון והשלישי מהסוף. ולכן:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)$$

לכן $S_n \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{24}$, כלומר הטור מתכנס וסכומו $\frac{7}{24}$.

3.

א. נשים לב שמתקיים:

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} =$$
$$\frac{1}{1-0} \cdot e^{-1} = e^{-1}$$

השתמשנו באריתמטיקה של גבולות ובגבול $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = e$. לכן מהשוואה עם $\frac{1}{n}$ מקבלים:

$$\frac{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \to 1 \cdot e^{-1} = e^{-1}$$

זהו קבוע חיובי. מכאן שניתן להפעיל את משפט ההשוואה השני. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר ולכן גם הטור המקורי מתבדר.

ב. נשתמש במבחן המנה.

$$\frac{\frac{((n+1)!)^3}{(3(n+1))!}}{\frac{(n!)^3}{(3n)!}}=\frac{(3n)!((n+1)!)^3}{(3n+3)!(n!)^3}=\frac{(3n)!}{(3n+3)!}\cdot\left[\frac{(n+1)!}{n!}\right]^3=$$
$$\frac{(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=\frac{(1+\frac{1}{n})^3}{(3+\frac{1}{n})(3+\frac{2}{n})(3+\frac{3}{n})}\to\frac{1}{3\cdot3\cdot3}=\frac{1}{27}<1$$

לכן ממבחן המנה הטור מתכנס.

ג. נשתמש במבחן ההשוואה השני עם $\frac{1}{n^{5/6}}$. מתקיים:

$$\frac{\frac{7\sqrt[6]{n^{13}}+2n}{\sqrt[3]{27n^9-10n+16}}}{\frac{1}{n^{5/6}}}=\frac{n^{5/6}\left(7n^{13/6}+2n\right)}{\sqrt[3]{27n^9-10n+16}}=\frac{7n^3+2n^{11/6}}{\sqrt[3]{27n^9-10n+16}}$$

נחלק בחזקה הגבוהה (n^3) ונקבל:

$$\frac{7n^3+2n^{11/6}}{\sqrt[3]{27n^9-10n+16}}=\frac{7+\frac{2}{n^{7/6}}}{\sqrt[3]{27-\frac{10}{n^8}+\frac{16}{n^9}}}\to\frac{7+0}{\sqrt[3]{27-0+0}}=\frac{7}{3}$$

זה קבוע חיובי, ולכן אכן ניתן להשתמש במשפט ההשוואה השני. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/6}}$ מתבדר (כפי שראינו בהרצאה) ולכן גם הטור המקורי מתבדר.

ד.

ראשית נתבונן בביטוי $\frac{3+\cos^2(n)}{2-\sin(n)}$. נשתמש בזהות $\cos^2(n)=1-\sin^2(n)$ ונקבל:

$$\frac{3+\cos^2(n)}{2-\sin(n)}=\frac{4-\sin^2(n)}{2-\sin n}=\frac{(2+\sin(n))(2-\sin(n))}{2-\sin(n)}=2+\sin(n)$$

מכיוון ש-$-1\le\sin(n)\le1$ לכל $n\in\mathbb{N}$ נקבל ש-$1\le2+\sin(n)\le3$ לכל n ולכן

$$\frac{1}{n^\alpha}\le\frac{3+\cos^2(n)}{(2-\sin(n))n^\alpha}\le\frac{3}{n^\alpha}\ (*)$$

לכל n[1]. כעת נוכל להשתמש במבחן ההשוואה הראשון.

- עבור $\alpha\le1$, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ מתבדר, ומהאי־שוויון השמאלי ב־$(*)$ נובע שגם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+\cos^2(n)}{(2-\sin(n))n^\alpha}$ מתבדר.
- עבור $\alpha>1$, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^\alpha}$ מתכנס (כפל בקבוע של טור מתכנס), ומהאי־שוויון הימני ב־$(*)$ נובע שגם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+\cos^2(n)}{(2-\sin(n))n^\alpha}$ מתכנס.

[1]הערה: ניתן לחסום את הביטוי $\frac{3+\cos^2(n)}{2-\sin(n)}$ מלמעלה ומלמטה גם מבלי להשתמש בזהות הטריגונומטרית, וכמובן שגם פתרונות כאלה הם בסדר.

.4

א. נוכיח את הטענה. מהנתון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ נובע ש־$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. בפרט זוהי סדרה מתכנסת ולכן חסומה. כלומר קיים $M > 0$ כך ש־$b_n \le M$ לכל n. מכיוון שהטורים חיוביים, נסיק ש־

$$a_n b_n \le M a_n$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} M a_n = M \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס מהנתון, וממבחן ההשוואה הראשון נובע שגם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס, כנדרש.

ב. נפריך את הטענה. ניקח $a_n = b_n = \frac{1}{n}$. אז שני הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו־$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ הם הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, שהוא מתבדר. לעומת זאת,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

וזהו טור מתכנס.

ג. נוכיח את הטענה. נתבונן באי־שוויון שנתון בהדרכה: $a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$. נעביר אגפים ונקבל:

$$2ab \le a^2 + b^2 \Rightarrow ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

זה נכון לכל $a, b \in \mathbb{R}$. בפרט לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n b_n \le \frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^2}{2}$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^2}{2}$ מתכנס מאריתמטיקה של טורים (חיבור וכפל בסקלר של הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ו־$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ שהם מתכנסים) וממשפט ההשוואה הראשון גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.