<u>הרצאה XVI- מכניקה</u>

הראנו בהרצאות קודמות $F(x) = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$. אמרנו גם שניתן להשתמש במשפט עבודה אנרגיה ולוותר על הנתון של הזמן. כמו כן : $\frac{d}{dt}[v^2] = \frac{d}{dt}[\vec{v}\cdot\vec{v}] = 2\vec{v}\cdot\frac{d}{dt}v = \frac{2}{m}F\cdot\vec{v}$. נבצע הכפלה בשתי האגפים ונקבל $\Delta\,[\,v^2\,] = \frac{2}{m}F\;\cdot\overbrace{v\Delta t}^{\Delta\bar{r}}$

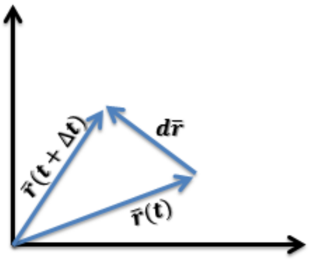
ומכאן $\int_i^f d\,(v^2) = \int_i^f \frac{2}{m}F\;\cdot\Delta r = v^2|_i^f$ ולכן מתקיים $\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \oint_{\bar{r}_i}^{\bar{r}_f} F\;\cdot d\bar{r}$.

כעת נגדיר כוחות משמרים, קונסרבטיביים : כוחות שגודל העבודה שלהם לא תנועה במסלול תנועתם אלא רק בנקודות היציאה והסיום של המסלול. ניתן לראות משמאל שכל הכוחות המרכזיים, גרביטציה, קפיץ, קולון, כולם משתייכים למשפחת הכוחות המשמרים.

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

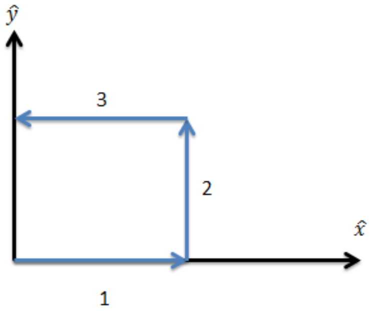
$$d\bar{r} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta}$$

$$\int_i^f \bar{F}d\bar{r} = \int_i^f f(r)dr = G(r_f) - G(r_i)$$



נביט בדוגמא לשם המתמטיקה, שאינה כה קונבנציונאלית- כח מלאכותי למדי.

דוגמא : $\vec{F} = A(xy\hat{x} + y^2\hat{y})$ נביט בעבודה בכל ציר $W_1 = \oint_1 F\;\cdot d\bar{r} = 0$ וגם $\vec{F}(y=0) = 0$. נביט במקרה אחר ונראה $\vec{F}(x=1,y) = A(y\hat{x} + y^2\hat{y})$ ולכן $W_2 = \oint_{(1,0)}^{(1,1)} A(y\hat{x} + y^2\hat{y})\;\cdot dy\hat{y} = \frac{A}{3}$ באופן דומה $W_3 = -\frac{A}{2}$. העבודות הן בהתאם למסלול המסומן בכחול, לכן העבודה הכוללת היא : $W_T = W_1 + W_2 + W_3$, ולכן $W_T = \frac{A}{6}$. כעת נחשב את העבודה אם יצא מנקודת ההתחלה של אחד ויגיע ישירות



לסוף שלוש : נקבל : $\vec{F}(x=0,y) = Ay^2\hat{y}$. נקבל כי הכוח נתון ע"י $W_{T_2} = \int_{(0,0)}^{(0,1)} Ay^2\hat{y}dy\hat{y} = \frac{Ay^3}{3}|_{(0,0)}^{(0,1)} = \frac{A}{3}$ וניתן בבירור לראות שהעבודה שונה, ולכן הכוח שהגדרנו בתחילת הדוגמא אינו כוח משמר.

נעבור לדוגמא נוספת, של נפילה חופשית.

דוגמא : ידוע כי מתקיים : $\vec{F} = -mg\hat{y}, y(x) = y_0 + v_{y,0}\left(\frac{x-x_0}{v_{x,0}}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x-x_0}{v_{x,0}}\right)^2$ נבחר שתי נקודות כלליות ונקבל כי מתקיים $\Delta r = \Delta x\hat{x} + \Delta y\hat{y} = \Delta x\hat{x} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x\hat{y} = (dx, \frac{dy}{dx}dx)$. מתקיים $\frac{dy}{dx} = \frac{v_{y,0}}{v_{x,0}} - g(\frac{x-x_0}{v_{x,0}^2})$.

מתקיים : $\vec{F}\;\cdot d\bar{r} = -\mathrm{mg}\hat{y}\left[dx\hat{x} + \frac{dy}{dx}dx\hat{y}\right] = -mg\frac{dy}{dx}dx$

ולכן העבודה היא : $W = \oint_i^f \vec{F}\;\cdot d\bar{r}\; = -mg\left[\frac{v_{y,0}}{v_{x,0}}(x_f - x_i) - \frac{g(x-x_0)^2}{2v_{x,0}^2}|_{x_0}^{x_f}\right] = -mg(y_f - y_i)$ ומכאן ניתן לראות שכח המשיכה (בנפילה חופשית) הינו כח משמר. (-תלוי רק בנקודת ההתחלה והסיום).

האנרגיה הקינטית ההתחלתית נתונה ע"י $E_k^i = \frac{1}{2}mv_{x,0}^2 + \frac{1}{2}mv_{y,0}^2$. מתקיים $v_{x,f} = v_{x,0}$ ועבור ציר y ישנה השתנות מסויימת בגודל המהירות : $v_{y,f} = v_{y,0} - \frac{g(x_f-x_0)}{v_{x,0}}$ ולכן האנרגיה הקיטנית של הגוף הנע בנפילה חופשית בנקודת הסיום $E_k^f = \frac{1}{2}mv_{x,0}^2 + \frac{1}{2}m[v_{y,0} - \frac{g(x_f-x_0)}{v_{x,0}}]^2$ ולכן $\Delta\mathrm{E}_k = mg[-v_{y,0}\frac{x_f-x_i}{v_{x,0}} + \frac{1}{2}g\left(\frac{x_f-x_0}{v_{x,0}}\right)^2$.

נעבור למסלול טיפה יותר מורכב, נסמן אותו ע"י *[x(s),y(s)]*.

מתקיים $\oint_i^f \vec{F}\cdot d\bar{r} = \oint_i^f F_x dx + F_y dy = \oint_i^f \left[F_x\frac{dx}{ds} + F_y\frac{dy}{ds}\right]ds$.

בשביל כוח משמר ניתן לרשום $\int_i^f \bar{F}(r)\cdot d\bar{r} = -U(f)+U(i)$ והפונקציה באגף ימין נקראת אנרגיה פוטנציאלית והיא קיימת אך ורק אם הכוח הוא משמר. אבל ידוע לנו כי $\int_i^f \bar{F}(r)\cdot d\bar{r} = \Delta \mathrm{E_k}$ אם נציב נקבל שמתקיים עבור כח משמר בכל נקודה ונקודה $E_k^i + U_i = E_k^f + U_f = \mathrm{E_T}$.

נכליל ונקבל : $\int_{x+\Delta x}^{x} F(x)dx = \underbrace{U(x+\Delta x)-U(x)}_{\Delta U}$ ולכן מתקיים $\Delta \mathrm{U} = -\int_{x+\Delta x}^{x} F(x)dx \approx -F(x)\Delta x$ נעביר אגפים לקבל $F(x) = -\frac{\Delta U}{\Delta x} = -\frac{dU}{dx}$. בהרצאה הבאה נכליל לתלת מימד ונדבר על דיאגרמות אנרגיה.