

הרצאה 21

5 בינואר 2014

למה:

\$P\$ מלבן \$n\$ מימדי, \$f: P \to \mathbb{R}\$, \$|f(x)| < C\$ אזי:
 $\forall P, Q: \underline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P)$

הוכחה

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \mathcal{F}) &= \sum_{i,j} \sup_{x \in P_i \overset{\circ}{\cap} Q_j} \text{vol}(P_i \overset{\circ}{\cap} Q_j) \\ \sum_i \left(\sum_j \sup_{x \in P_i \overset{\circ}{\cap} Q_j} f(x) \text{vol}(P_i \overset{\circ}{\cap} Q_j) \right) &\leq \sum_i \left(\sum_j \sup_{x \in P_i} f(x) \text{vol}(P_i \overset{\circ}{\cap} Q_j) \right) \\ &= \sum_i \sup_{x \in P_i} f(x) \sum_j \text{vol}(P_i \overset{\circ}{\cap} Q_j) = \sum_i \sup_{x \in P_i} f(x) \text{vol}(P_i) = \overline{S}(f, P) \end{aligned}$$

הוכחנו כי $\overline{S}(f, \mathcal{R}) \leq \overline{S}(f, P)$. מתקיים גם $\underline{S}(f, \mathcal{R}) \geq \underline{S}(f, Q)$ ולכן:

$$\underline{S}(f, Q) \leq \underline{S}(f, \mathcal{R}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{R}) \leq \overline{S}(f, P)$$

$$\Rightarrow \underline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P)$$

$$M := \sup_{x \in P} f(x)$$

$$m := \inf_{x \in P} f(x)$$

$$\overline{S}(f, P) = \sum_i \sup_{x \in P_i} f(x) \text{vol}(P_i) \leq M \sum_i \text{vol}(P_i) = M \text{vol}(P)$$

$$\underline{S}(f, P) = \sum_i \inf_{x \in P_i} f(x) \text{vol}(P_i) \geq m \sum_i \text{vol}(P_i) = m \text{vol}(P)$$

$$m \text{vol}(P) \leq \underline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P) \leq M \text{vol}(P)$$

הגדרה

$$f: P \rightarrow \mathbb{R}, |f(x)| \leq C$$

$$\inf_P \overline{S}(f, P) := \overline{I}$$

$$\sup_Q \underline{S}(f, Q) := \underline{I}$$

נשים לב כי $\forall P_1, Q_1: \underline{I} \leq \sup_Q \underline{S}(f, Q) \leq \underline{S}(f, Q_1) \leq \overline{S}(f, P_1) \leq \inf_P \overline{S}(f, P) = \overline{I}$

הגדרה

$$f: P \rightarrow \mathbb{R}, |f(x)| \leq C$$

אומרים כי \$f\$ אינטגרבילית לפי רימן-דרבו אם $f \in \mathcal{R}(P)$ ואם $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) := I(f) = \int_P f(x)$

משפט

$$f: P \rightarrow \mathbb{R}, |f(x)| \leq C$$

$\forall \epsilon > 0 \exists P: 0 \leq \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon$ אם ורק אם $f \in \mathcal{R}(P)$

הוכחה

נניח כי התנאי מתקיים

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \exists P : 0 \leq \bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon \\ \bar{S}(f, P) < \underline{S}(f, P) + \epsilon \\ \bar{I} = \inf_Q \bar{S}(f, Q) < \underline{S}(f, P) + \epsilon \\ \bar{I} - \epsilon < \underline{S}(f, P) \\ \bar{I} - \epsilon < \sup_Q \underline{S}(f, Q) = \underline{I} \\ 0 \leq \bar{I} - \underline{I} < \epsilon \\ \epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \bar{I} = \underline{I} \Rightarrow f \in \mathcal{R}(P) \end{aligned}$$

בכיוון השני, נניח כי $f \in \mathcal{R}(P)$

נקבע $\epsilon > 0$

$$\exists Q : I - \epsilon < \underline{S}(f, Q) \leq I$$

$$\exists P : I < \bar{S}(f, P) \leq I + \epsilon$$

$$I - \epsilon < \underline{S}(f, Q) \leq \bar{S}(f, P) \leq I + \epsilon$$

$$\text{אז } F := P \cap Q$$

$$I - \epsilon < \underline{S}(f, Q) \leq \underline{S}(f, F) \leq \bar{S}(f, F) \leq \bar{S}(f, P) \leq I + \epsilon$$

$$0 \leq \bar{S}(f, R) - \underline{S}(f, R) \leq 2\epsilon$$

$$\boxed{f \in \mathcal{R}(P) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists P : 0 \leq \bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon}$$

משפט

אם $f \in C(P)$ אזי $f \in \mathcal{F}(P)$

הוכחה

נקבע $\epsilon > 0$, לפי משפט קנטור f רציפה במ"ש ב- P .

$$\exists \delta > 0 : \forall x, y \in P : \|x - y\|_\infty < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

$$P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

ניקח N טבעי כך ש: $\frac{\max(b_i - a_i)}{N} < \delta$

$$\frac{\max(b_i - a_i)}{\delta} < N$$

$$\Delta_i^{(s)} = a_i + \frac{s}{N} (b_i - a_i)$$

$$P = \left\{ \Delta_1^{(i_1)} \times \dots \times \Delta_n^{(i_n)} \right\} = \{P_i\}$$

$$|M_i - m_i| < \epsilon \text{ וגם } |f(x) - f(y)| < \epsilon \text{ ולכן } \|x - y\|_\infty < \delta \text{ כי } x, y \in P_i$$

$$M_i = \sup_{x \in P_i} f(x) = f(x_{max}), m_i = \inf_{x \in P_i} f(x) = f(x_{min})$$

$$\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \sum_i M_i V(P_i) - \sum_i m_i V(P_i) = \sum_i (M_i - m_i) V(P_i) < \epsilon \sum_i V(P_i) = \epsilon V(P)$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists P : 0 \leq \bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon V(P)$$

ולכן לפי הקריטריון $f \in \mathcal{R}(P)$

קבוצות ממידה אפס

הגדרה

$N \subset \mathbb{R}^n$ ממידה 0. $mes N = 0$ אם $\exists \{P_i\}_{i=1}^\infty$ קטעים, כך ש $N \subset \bigcup_{i=1}^\infty \overset{\circ}{P}_i$ ו- $\sum_{i=1}^\infty V(P_i) < \epsilon$

דוגמא

רציונלים $n = 1 : \{r_n\}_{n=1}^\infty$

נקבע $\epsilon > 0$

$$P_n = \left(r_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \right)$$

$$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{n=1}^\infty P_n$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$$

עוד דוגמא היא קבוצת קנטור.

הערה

אם N קומפקטית:
 $mesN = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \{P_i\}_{i=1}^M : N \subset \bigcup_{i=1}^M P_i, \sum_{i=1}^M V(P_i) < \epsilon$

למה

N קומפקטית אז כל כיסוי $N \subset \bigcup_{i=1}^\infty P_i$ כולל תת-כיסוי סופי.

משפט

$f : P \rightarrow \mathbb{R}, |f(x)| < C$ נניח ש $f \in C(P - N)$ עבור N קבוצה קומפקטית, אזי $mesN = 0$, אזי $f \in \mathcal{R}(P)$

הוכחה

נקבע $\epsilon > 0$

מלמה קודמת $N \subset P_1 \cup \dots \cup P_M$ כך ש $\sum_{i=1}^M V(P_i) < \epsilon$

נתבונן ב $K := P - \left(\bigcup_{i=1}^M P_i\right)$

K קבוצה חסומה וסגורה, קומפקטית.

\mathcal{P}' חלוקה שמוכלת ב $\{P_i\}_{i=1}^M, f \in C(K)$ ולכן לפי משפט קנטור f רציפה במ"ש.

$\exists \delta > 0 : \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

בונים חלוקה \mathcal{P}'' כך ש:

$$\forall P_i'' \subset K : \left| \sup_{P_i} f(x) - \inf_{P_i} f(x) \right| < \epsilon$$

$$\mathcal{P}''' = \mathcal{P}' \cap \mathcal{P}''$$

מקבלים חלוקה $\{Q_j\} = \mathcal{P}'''$

$$\forall Q_j \in \mathcal{P}'' : Q_j \cap P_i \neq \emptyset$$

$$\text{לפי רציפות במ"ש} \left| \sup_{Q_j} f(x) - \inf_{Q_j} f(x) \right| < \epsilon$$

$$\bar{S}(f, \mathcal{P}''') - \underline{S}(f, \mathcal{P}''') =$$

$$\sum_{i=1}^M (\sup_{x \in P_i} f(x) - \inf_{x \in P_i} f(x)) V(P_i) + \sum_{Q_j \in \mathcal{P}'''} (\sup_{x \in Q_j} f(x) - \inf_{x \in Q_j} f(x)) V(Q_j)$$

$$|f(x)| \leq C$$

$$\left| \sup_{x \in P_i} f(x) - \inf_{x \in P_i} f(x) \right| \leq 2C$$

$$\sum_{i=1}^M (\sup_{x \in P_i} f(x) - \inf_{x \in P_i} f(x)) V(P_i) \leq 2C \sum_{i=1}^M V(P_i) < 2C\epsilon \quad .1$$

$$\sum_{Q_j \in \mathcal{P}'''} (\sup_{x \in Q_j} f(x) - \inf_{x \in Q_j} f(x)) V(Q_j) \leq \epsilon Vol(P) \quad .2$$

$$\Rightarrow |\bar{S} - \underline{S}| \leq 2C\epsilon + \epsilon Vol(P)$$

כלומר אם היינו לוקחים $\frac{\epsilon}{2C + Vol(P)}$ היה יוצא קטן מן.

נפח

הגדרה

תהי $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, פונקציה קרקטריסטית (indicator) :

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \Omega \\ 0 & , x \notin \Omega \end{cases}$$

הגדרה

$\exists P : \Omega \subset P$ קבוצה חסומה:

$\chi_\Omega \in \mathcal{R}(P)$ בעלת נפח (מדידה לפי רימן) אם

הגדרה

אם Ω מדידה אז $\int \chi_\Omega(x) dx := Vol(\Omega)$