89-198 מתמטיקה בדידה – תרגול 8

אינדוקציה

<u>עיקרון האינדוקציה המתמטית</u>: יהי $P(n)$ פרדיקט, אזי $P(n)$ נכון לכל $n \in \mathbb{N}$ אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. בסיס האינדוקציה: הטענה $P(0)$ נכונה.
2. שלב האינדוקציה: לכל $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

<u>תרגיל</u>: הוכח שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

<u>הוכחה</u>: נוכיח באינדוקציה על n.

<u>בסיס האינדוקציה</u>: נוכיח עבור $n = 0$, אכן $0 \cdot 1 = 0 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 2}{3}$.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: יהי $n \in \mathbb{N}$ ונניח שהטענה מתקיימת עבור n, כלומר $\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

<u>מעבר האינדוקציה</u>: נוכיח שהטענה מתקיימת עבור $n+1$, כלומר

$$\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

מהנחת האינדוקציה נקבל:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \sum_{k=0}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{3(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

לסיכום, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

<u>הערה</u>: יש פעמים בהם הטענה לא נכונה לכל מספר טבעי אלא כמעט לכל מספר טבעי, כלומר קיים $a \in \mathbb{N}$ כך שהטענה נכונה לכל $a \le n \in \mathbb{N}$. במקרה זה a מהווה את בסיס האינדוקציה.

<u>תרגיל</u> (אי שוויון ברנולי): יהי $0 < x$ מספר ממשי. הוכח שלכל $n \ge 2$ טבעי מתקיים $(1+x)^n > 1 + nx$.

שימו לב שהטענה לא נכונה עבור $n = 0$ ועבור $n = 1$.

<u>הוכחה</u>: נוכיח באינדוקציה על n.

<u>בסיס האינדוקציה</u>: נוכיח עבור $n = 2$. $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$.

אי השוויון מתקיים כי $x > 0$ ולכן $x^2 > 0$.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: יהי $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ ונניח שהטענה נכונה עבור n, כלומר $(1+x)^n > 1 + nx$.

<u>מעבר האינדוקציה</u>: נוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$, כלומר שמתקיים $(1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x$.

ואכן,

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) > (1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + nx^2 > 1 + (n+1)x$$

כאשר אי שוויון השמאלי נובע מהנחת האינדוקציה ומכיון ש $1 + x > 0$.

אי שוויון הימני מתקיים מכיון ש $x^2 > 0$ ו $n > 0$, לכן $nx^2 > 0$.

לסיכום, לכל $n \ge 2$ מתקיים $(1+x)^n > 1 + nx$.

<u>תרגיל</u> (כללי דה מורגן עבור מספר סופי של קבוצות)

הוכח שלכל $n \in \mathbb{N}^+$, לכל משפחה סופית של קבוצות $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ מתקיים

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

<u>הוכחה</u>: נוכיח באינדוקציה על n.

<u>בסיס האינדוקציה</u>: נוכיח עבור $n = 1$. תהי $\{A_1\}$ משפחה של קבוצות. אכן $\overline{\bigcup_{i=1}^{1} A_i} = \overline{A_1} = \bigcap_{i=1}^{1} \overline{A_i}$.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: יהי $n \in \mathbb{N}^+$ ונניח שהטענה נכונה עבור n, כלומר לכל $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ מתקיים $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

<u>מעבר האינדוקציה</u>: נוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$. תהי $\{A_i\}_{i=1}^{n+1}$ ונוכיח שמתקיים $\overline{\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \overline{A_i}$.

נסתכל על אגף ימין. מהנחת האינדוקציה עבור $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ מתקיים

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} \overline{A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \cap \overline{A_{n+1}} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} \cap \overline{A_{n+1}}$$

נסמן לצורך הנוחות $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = B$.

לפי כלל דה מורגן עבור 2 קבוצות נקבל ש $\overline{B} \cap \overline{A_{n+1}} = \overline{B \cup A_{n+1}}$.

ולכן $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} \cap \overline{A_{n+1}} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i}$.

לסיכום, לכל $n \in \mathbb{N}^+$ ולכל $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ מתקיים $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

<u>מינוח</u>: הגדרה רקורסיבית היא הגדרה של מושג בעזרת שימוש באותה הגדרה.

<u>דוגמה</u>: נגדיר את פעולת החזקה בצורה רקורסיבית. יהיו $a \in \mathbb{R}$ ו $n \in \mathbb{N}$, אזי

$$a^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ a^{n-1} \cdot a, & n > 0 \end{cases}$$

<u>תרגיל</u>: הוכח שלכל $a \in \mathbb{R}$ ולכל $n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $a^{m+n} = a^m a^n$.

<u>רעיון ההוכחה</u>: הטענה היא $\forall a \in \mathbb{R} \forall m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}: a^{m+n} = a^m a^n$, כלומר יש 3 כמתי "לכל".

נניח ש $a \in \mathbb{R}$ ו $m \in \mathbb{N}$ מספרים שרירותים, ונוכיח באינדוקציה את הטענה $\forall n \in \mathbb{N}: a^{m+n} = a^m a^n$.

במהלך ההוכחה נשתמש בהגדרה הרקורסיבית של פעולת החזקה.

<u>הוכחה</u>: יהיו $a \in \mathbb{R}$ ו $m \in \mathbb{N}$ שרירותיים. נוכיח ש $\forall n \in \mathbb{N}: a^{m+n} = a^m a^n$ באינדוקציה על n.

<u>בסיס האינדוקציה</u>: עבור $n = 0$ מתקיים $a^{m+0} = a^m = a^m \cdot 1 = a^m \cdot a^0$.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: יהי $n \in \mathbb{N}$ ונניח ש $a^{m+n} = a^m a^n$.

<u>מעבר האינדוקציה</u>: נוכיח עבור $n+1$.

$$a^{m+(n+1)} \overset{\text{אסוציאטיביות של חיבור}}{=} a^{(m+n)+1} \overset{\text{הגדרת חזקה}}{=} a^{m+n} \cdot a \overset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} a^m a^n \cdot a \overset{\text{הגדרת חזקה}}{=} a^m a^{n+1}$$

<u>תרגיל</u>: תהי $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המוגדרת בצורה הבאה $f(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 2f(n-1)+3, & n>0\end{cases}$.

הוכח שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $f(n)=2^{n+2}-3$.

<u>הוכחה</u>: נוכיח באינדוקציה על n.

<u>בסיס האינדוקציה</u>: עבור $n=0$ מתקיים $f(0)=1=4-3=2^{0+2}-3$.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: יהי $n\in\mathbb{N}$ ונניח שהטענה נכונה עבור n, כלומר $f(n)=2^{n+2}-3$.

<u>מעבר האינדוקציה</u>: נוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$, כלומר $f(n+1)=2^{(n+1)+2}-3$.

מהגדרת הפונקציה f ומהנחת האינדוקציה נקבל ש

$$f(n+1)=2f(n)+3=2(2^{n+2}-3)+3=2^{n+3}-6+3=2^{(n+1)+2}-3$$

<u>עיקרון האינדוקציה השלמה</u>: יהי $P(n)$ פרדיקט,

אזי $P(n)$ נכון לכל n טבעי אם לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\Big(\forall k\in\mathbb{N}\big(k<n\Rightarrow P(k)\big)\Big)\Rightarrow P(n)$.

<u>הערה</u>: שימו לב שלא צריך להוכיח את בסיס האינדוקציה בנפרד.

<u>משפט</u>: עיקרון האינדוקציה המתמטית שקול לעיקרון האינדוקציה השלמה.

<u>תרגיל</u>: הוכח שניתן לייצג כל מספר טבעי $12\le n$ כ $n=4a+5b$ עבור $a,b\in\mathbb{N}$.

<u>הוכחה</u>:

נוכיח באינדוקציה שלמה על n.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: יהי $12\le n\in\mathbb{N}$, ונניח שלכל $12\le k<n$, ניתן לייצג את k כ $k=4a+5b$ עבור $a,b\in\mathbb{N}$.

<u>מעבר האינדוקציה</u>: נוכיח עבור n.

אם $n=12$ אזי $n=4\cdot 3+5\cdot 0$.

אם $n=13$ אזי $n=4\cdot 2+5\cdot 1$.

אם $n=14$ אזי $n=4\cdot 1+5\cdot 2$.

אם $n=15$ אזי $n=4\cdot 0+5\cdot 3$.

אחרת, $16\le n$ ונסתכל על $n-4$.

מכיון ש $12\le n-4<n$ נובע מהנחת האינדוקציה ש $n-4=4\cdot a+5\cdot b$ עבור $a,b\in\mathbb{N}$.

ונקבל ש $n=4\cdot(a+1)+5\cdot b$ ובנוסף $a+1,b\in\mathbb{N}$.

<u>תרגיל</u>: נגדיר $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ בצורה הבאה $f(n)=\begin{cases}0, & n=0\\ 10, & n=1\\ f(n-1)+6f(n-2), & n\ge 2\end{cases}$.

הוכח שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $f(n)=2\cdot 3^n+(-2)^{n+1}$.

<u>הוכחה</u>:

נוכיח באינדוקציה שלמה על n.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: יהי $n\in\mathbb{N}$, ונניח שלכל $k<n$ טבעי, מתקיים $f(k)=2\cdot 3^k+(-2)^{k+1}$.

<u>מעבר האינדוקציה</u>: נוכיח עבור n.

עבור $n=0$ מתקיים $2\cdot 3^0+(-2)^{0+1}=2+(-2)=0=f(0)$.

עבור $n=1$ מתקיים $2\cdot 3^1+(-2)^{1+1}=6+4=10=f(1)$.

עבור $n\geq 2$ מתקיים $f(n)=f(n-1)+6f(n-2)$, ובנוסף $n-1,n-2\in\mathbb{N}$ וגם $n-1,n-2<n$.

מהנחת האינדוקציה מתקיים

$$f(n-1)=2\cdot 3^{n-1}+(-2)^{(n-1)+1},\qquad f(n-2)=2\cdot 3^{n-2}+(-2)^{(n-2)+1}$$

כעת

$$f(n)=f(n-1)+6f(n-2)=2\cdot 3^{n-1}+(-2)^n+6(2\cdot 3^{n-2}+(-2)^{n-1})=$$
$$6\cdot 3^{n-2}+(-2)(-2)^{n-1}+12\cdot 3^{n-2}+6(-2)^{n-1}=18\cdot 3^{n-2}+4(-2)^{n-1}=$$
$$2\cdot 3^{n-2+2}+(-2)^{n-1+2}=2\cdot 3^n+(-2)^{n+1}$$

לכן לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $f(n)=2\cdot 3^n+(-2)^{n+1}$.

<u>הגדרה</u>: יהי R יחס על A. נגדיר לכל $n\in\mathbb{N}^+$, $R^n=\begin{cases}R, & n=1\\ R^{n-1}\circ R, & n>1\end{cases}$.

<u>דוגמה</u>: נסמן $A=\{1,2,3\}$ ו $R=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$. אזי

$$R^1=R, R^2=R\circ R=\{(1,3),(2,1),(3,2)\}, R^3=R^2\circ R=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$
$$R^4=R^3\circ R=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}=R$$

<u>תרגיל</u>: יהיו R,S יחסים על A. הוכח שלכל $n\in\mathbb{N}^+$, מתקיים $(R\cap S)^n\subseteq R^n\cap S^n$.

<u>הוכחה</u>: נוכיח באינדוקציה על n.

<u>בסיס האינדוקציה</u>: עבור $n=1$, לפי הגדרה $R^1=R$, $S^1=S$ ו $(R\cap S)^1=R\cap S$.

לכן $(R\cap S)^1=R\cap S\subseteq R^1\cap S^1$.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: יהי $n\in\mathbb{N}^+$, נניח ש $(R\cap S)^n\subseteq R^n\cap S^n$.

<u>מעבר האינדוקציה</u>: עבור $n+1$, נוכיח ש $(R\cap S)^{n+1}\subseteq R^{n+1}\cap S^{n+1}$.

יהיו $x,y\in A$ ונניח ש $(x,y)\in(R\cap S)^{n+1}$, כלומר $(x,y)\in(R\cap S)^n\circ(R\cap S)$.

אזי קיים $z\in A$ כך ש $(x,z)\in R\cap S$ ובנוסף $(z,y)\in(R\cap S)^n$.

מכיון ש $(x,z)\in R\cap S$ נובע ש $(x,z)\in R$ וגם $(x,z)\in S$.

מכיון ש $(z,y)\in(R\cap S)^n$ נובע מהנחת האינדוקציה ש $(z,y)\in R^n\cap S^n$.

לכן $(z,y)\in R^n$ וגם $(z,y)\in S^n$.

מכיון ש $(x,z)\in R$ ו $(z,y)\in R^n$ נובע ש $(x,y)\in R^n\circ R$, כלומר $(x,y)\in R^{n+1}$.

מכיון ש $(x,z)\in S$ ו $(z,y)\in S^n$ נובע ש $(x,y)\in S^n\circ S$, כלומר $(x,y)\in S^{n+1}$.

לכן $(x,y)\in R^{n+1}\cap S^{n+1}$.

לסיכום, לכל $n\in\mathbb{N}^+$, מתקיים $(R\cap S)^n\subseteq R^n\cap S^n$.