

מערך תרגול 9

201 – 88 תשע"ח סמסטר ב'

1 העתקת Weingarten

תזכורת 1

א. תהי $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$. מגדירים את הנגזרת הכיוונית של f בנקודה $p \in \mathbb{R}^n$ בכיוון וקטור $v \in \mathbb{R}^n$ ע"י

$$\nabla_v f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \alpha(t)$$

באשר $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ עקומה המקיימת $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. ההגדרה לא תלויה בבחירת העקומה.

ב. בהינתן פרמטריזציה גולרית $x(u^1, u^2)$ של משטח M עם וקטור נורמל $n = n(u^1, u^2)$ ונקודה $p \in M \subseteq \mathbb{R}^3$, ניתן להרחיב את n לשדה וקטורי $N(x, y, z)$ המוגדר בסביבה פתוחה של p , במובן ש- $n(u^1, u^2) = N(x(u^1, u^2))$.

ג. יהיו $p \in M$ ו- $v \in T_p M$, ותהי $\beta = x \circ \alpha$ עקומה על המשטח M המקיימת $\beta(0) = p$ וכן $\beta'(0) = v$. הנגזרת הכיוונית $\nabla_v N$ מקיימת

$$\nabla_v N = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} n \circ \alpha(t)$$

ד. יהי $p \in M$. העתקת Weingarten (אופרטור הצורה) היא האנדומורפיזם $W_p : T_p \rightarrow T_p$ המוגדר ע"י הנגזרת הכיוונית של השדה הוקטורי $N(x, y, z)$:

$$W_p(v) = \nabla_v N = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} n \circ \alpha(t)$$

בפרט

$$W(x_i) = n_i = \frac{\partial n}{\partial u^i}$$

תזכורת 2 נסתכל על משטח שהוא הגרף של הפונקציה $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ותהי $p \in \mathbb{R}^2$ נקודה קריטית, כלומר $\nabla f = 0$ שם. אז

א. המישור המשיק T_p הוא מישור אופקי.

ב. אם $\det(H_f) < 0$ אז p נקודת אוכף, ואם $\det(H_f) > 0$ אז p נקודת מינימום או מקסימום מקומי.

ג. אם חושבים על מטריצת ההסיון H_f כעל העתקה לינארית $H_f : T_p \rightarrow T_p$ (אנדומורפיזם של המישור משיק האופקי) אז H_f בנקודה קריטית היא מקרה פרטי של העתקת ווינגרטון.

תרגיל 1 הגרף של הפונקציה $f(x, y) = 3x + y + 2$ הוא מישור. מיצאו את העתקת ווינגרטון של משטח זה.

פתרון 1 פרמטריזציה $x(u^1, u^2) = (u^1, -2 - 3u^1, u^2)$ נמצא נורמל:

$$n(u^1, u^2) = \frac{x_1 \times x_2}{|x_1 \times x_2|}$$

נחשב:

$$x_1 = (1, -3, 0)$$

$$x_2 = (0, 0, 1)$$

לכן

$$x_1 \times x_2 = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-3, -1, 0)$$

כלומר $x_1 \times x_2$ קבוע לכן $n(u^1, u^2) = \frac{x_1 \times x_2}{|x_1 \times x_2|}$ קבוע. לכן בכל נקודה $p \in M$ ניתן להרחיב את n ל- N במובן שהוסבר לעיל, ואז N הוא שדה וקטורי קבוע המוגדר בסביבה פתוחה של p ב- \mathbb{R}^3 . לכן הנגזרת הכיוונית היא 0 לכל $v \in T_p$ כלומר $\nabla_v N \equiv 0$.

תרגיל 2 מיצאו את העתקת ווינגרטון של הגליל $x(u^1, u^2) = (\cos u^1, \sin u^1, u^2)$.

פתרון 2 ראינו כי $n(u^1, u^2) = (\cos u^1, \sin u^1, 0)$ נשים לב כי

$$\frac{\partial n}{\partial u^1} = (-\sin u^1, \cos u^1, 0) = \frac{\partial x}{\partial u^1} = x_1$$

כעת יהי $v = v^i x_i \in T_p M$. מלינאריות העתקת ווינגרטון ומ- $\frac{\partial n}{\partial u^i}$ מקבלים

$$\begin{aligned} W_p(v^i x_i) &= v^i W_p(x_i) \\ &= v^i n_i \\ &= v^1 n_1 + v^2 n_2 \\ &= v^1 x_1 + v^2 \cdot 0 = v^1 x_1 \end{aligned}$$

בפרט,

$$W_p(x_1) = x_1 \quad W_p(x_2) = 0$$

2 מדידת שטח על משטחים

תזכורת 3 השטח של המשטח D הנתון ע"י פרמטריזציה $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ הוא

$$area(D) = \int_U \sqrt{\det(g_{ij})} du^1 du^2$$

תרגיל 3 נסתכל על ספירה מרדיוס ρ שמרכזה בראשית הצירים. חשבו את השטח של התחום D של הספירה המוכל באוקטנט הראשון (כלומר כל הקואורדינטות הקרטזיות חיוביות).

פתרון 3 מאינפי' 3 אנחנו יודעים כי $dA = \rho^2 \sin \phi d\theta d\phi$ כלומר

$$\int_D dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin \phi d\theta d\phi = \rho^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) d\phi = \rho^2 \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi = \rho^2 \frac{\pi}{2}$$

כי $z \geq 0$ משמעו $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, ו- $x \geq 0, y \geq 0$ משמעו $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

נוודא פתרון זה גם באמצעות הנוסחה $area(D) = \int_U \sqrt{\det(g_{ij})} du^1 du^2$

המשטח הוא $x(\theta, \phi) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$ עבור $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$,

לכן המטריקה היא

$$\begin{aligned} x_\theta &= (-\rho \sin \phi \sin \theta, \rho \sin \phi \cos \theta, 0) \\ x_\phi &= (\rho \cos \phi \cos \theta, \rho \cos \phi \sin \theta, -\rho \sin \phi) \\ (g_{ij}) &= \begin{pmatrix} \rho^2 \sin^2 \phi & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ומתקיים

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = \sqrt{\rho^4 \sin^2 \phi} = \rho^2 \sin \phi$$

כלומר קיבלנו את אותה הנוסחה.

תרגיל 4 הראו כי אם המטריקה (g_{ij}) שקולה קונפורמית למטריקה שטוחה סטנדרטית עם גורם קונפורמי $\lambda > 0$ אז אלמנט השטח הוא $dA = \lambda du^1 du^2$.

פתרון 4 נתון $g_{ij} = \lambda \delta_{ij}$ לכן

$$dA = \sqrt{\det(g_{ij})} du^1 du^2 = \sqrt{\det(\lambda \delta_{ij})} du^1 du^2 = \sqrt{\lambda^2} du^1 du^2 = \lambda du^1 du^2$$