תירגול 3

10 במרץ 2014

שימוש בחקירת פונקציה

תרגיל: הוכח כי אין פתרון למשוואה $e^x = x$
פתרון: שקול להוכיח כי הפונקציה $f(x) = e^x - x$ אינה חותכת את ציר x. נחקור את הפונקציה:
$f'(x) = e^x - 1$ ולכן יש נקודת קיצון ב $x = 0$. כיוון ש $f"(x) = e^x$ נקבל כי $f"(0) > 1$ ולכן $x = 0$ נקודת מיני'.
כיוון ש $f(0) = 1$ נקבל כי $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 1$ בפרט $f(x)$ אינה חותכת את ציר x.

אינטגראל לא מסוים- פונקציה קדומה

הגדרה: $F(\mathrm{x})$ תיקרא פונקציה קדומה של $f(x)$ בקבוצה A אם מתקיים : $\forall x \in A$ $F'(x) = f(x)$
ההגדרה: האינגראל הלא מסוים של $f(x)$ הוא אוסף כל הפונקציות. סימון: $\int f(x)dx$
למשל: פוקציה קדומה של $f(x) = x$ בכל הישר היא $F(x) = \frac{x^2}{2}$.
משפט: תהא $f(x)$ פונקציה. אם $F(x), G(x)$ שתי פונקציות קדומות שלה בקבוצה A אזי מתקיים שם $F(x) = G(x) + c$ כאשר c קבוע.
למשל: גם $G(x) = \frac{x^2}{2} + 2$ גם פונקציה קדומה של x . וכל פונקציה קדומה של x היא מהצורה $\frac{x^2}{2} + c$.
טבלאת פונקציות קדומות בכל הישר (ישירות מהגדרה)

$f(x)$	$F(x)$
0	1
$x^n,\, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$ln\|x\|$
$a^x,\, a > 0$	$\frac{1}{ln(a)}a^x$
e^x	e^x
$sin(x)$	$-cos(x)$
$cos(x)$	$sin(x)$
$\frac{1}{cos^2(x)}$	$tan(x)$
$\frac{1}{sin^2(x)}$	$-ctg(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsin(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctan(x)$

הערה: בכל התשובות צריך להוסיף את הקבוע c לתשובה הסופית
דוגמא

1. $f(x) = \frac{2x^4}{1+x^2}$

פתרון $f(x) = 2\frac{x^4-1+1}{1+x^2} = 2\frac{x^4-1}{1+x^2} + 2\frac{1}{1+x^2} = 2(1-x^2) + 2\frac{1}{1+x^2}$

ולכן $\int f(x)dx = 2\int(1-x^2)dx + 2\int\frac{1}{1+x^2}dx = 2(x-\frac{x^3}{3}) + 2\arctan(x)$

שיטת ההצבה

לפי כלל השרשרת מתקיים
$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$
ולכן $\int f(g(x))g'(x)dx = \int(F(g(x)))'dx = F(g(x)) + c$

1. השלמה לריבוע $= \int\frac{dx}{x^2+x+1\frac{1}{4}} = \int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1\frac{1}{4}} = [t = x+\frac{1}{2} \Rightarrow dt = dx] = \int\frac{dt}{t^2+1} = \arctan(t) = \arctan(x+\frac{1}{2})$

2. $\int xe^{x^2}dx = [t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx] = \int e^t\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}e^{x^2}$

3. $\int\tan(x)dx = \int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = [t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\sin(x)dx] = \int\frac{1}{t}(-dt) = -\ln|t| = -\ln|\cos(x)|$

4. $\int x^3(3x^2-1)^{17}dx = [t = 3x^2-1 \Rightarrow dt = 6xdx] = \int(\frac{t+1}{3})t^{17}\frac{dt}{6} = \frac{1}{18}\int t^{18} + t^{17}dt$

5. $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\ a>0 = \int\frac{1}{\sqrt{a^2}\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}dx = [t = \frac{x}{a} \Rightarrow dt = \frac{1}{a}dx] = \frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}adt = \frac{a}{a}\arcsin(t) = \arcsin(\frac{x}{a})$

6. $\int\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx = [x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt] =$
$= \int\frac{1}{t}e^t 2tdt = \int 2e^t dt = 2e^t = 2e^{\sqrt{x}}$

הערה : בשיטת ההצבה אנו מציבים $t = t(x)$. בחלק מהתרגילים מבטאים $x = x(t)$
ואז צריך לוודא שניתן להפוך את הפונקציה לקבלת $t = t(x)$

שיטת אינטגראציה בחלקים

מחוקי הגזירה מתקיים $(f\cdot g)' = f'g + g'f$ ולכן
$\int g'(x)f(x)dx = \int[f(x)g(x)]'dx - \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)$

1. $\int x\ln(x)dx = [g'(x) = x, f(x) = \ln(x)] = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$

2. $\int x\arctan(x)dx = [u' = x, v = \arctan(x)] = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \int\frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}(x-\arctan(x)) + c$

3. $F(x) = \int e^x\cos(x)dx = [g'(x) = \cos(x), f(x) = e^x] = e^x\sin(x) - \int e^x\sin(x)dx$
$= [g'(x) = \sin(x), f(x) = e^x] = e^x\sin(x) - \left(-e^x\cos(x) - \int -e^x\cos(x)dx\right) = e^x(\sin(x)+\cos(x)) - F(x)$

ומכאן ש $2F(x) = e^x(\sin(x)+\cos(x))$ ולכן $F(x) = \frac{e^x(\sin(x)+\cos(x))}{2}$

4. $.I_m(x) = \int \frac{1}{(1+x^2)^m} dx$

$$I_m(x) = [g' = 1, f = \frac{1}{(1+x^2)^m}] = \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^m} dx = x \frac{1}{(1+x^2)^m} - \int \frac{-x(2mx)}{(1+x^2)^{m+1}} dx$$
$$= \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2m \int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{m+1}} dx = \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2m(I_m - I_{m+1})$$

ולכן $I_{m+1} = \frac{x}{2m(1+x^2)^m} + I_m \frac{(2m-1)}{2m}$

עם תנאי התחלה $I_1 = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

הצבה טריגונו' (גם סינוס/קוסינוס היפורבולי) והצבה אוניברסאלית

1. מכפלה של $\cos, \sin$ שאחד מהם בחזקה אי־זוגית

$$\int \frac{\sin(x)}{\sqrt{2-\cos^2}} dx = [t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\sin(x)dx] = \int \frac{-dt}{\sqrt{2-t^2}} = -\arcsin(\frac{t}{\sqrt{2}}) = -\arcsin(\frac{\cos(x)}{\sqrt{2}})$$

2. אם שניהם זוגיים־ ניתן לפעמים לפשט את הביטוי בעזרת זהויות טרי'

$$\int \sin^2(x)\cos^4(x)dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}(\frac{1+\cos(2x)}{2})^2 dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos(2x))(1+2\cos(2x)+\cos^2(x))dx$$
$$= \frac{1}{8}\int 1+\cos(2x)+\cos^2(x) - 2\cos^3(2x) - \cos^2(x)\cos(2x)dx$$
$$= \frac{1}{8}\int 1+\cos(2x)+\frac{1+\cos(2x)}{2} - 2\cos(2x)[\frac{1+\cos(4x)}{2}] - \frac{1+\cos(2x)}{2}\cos(2x)dx$$

תמשיכו לבד (כל המחוברים בסופו של דבר ממעלה 1...+ $\cos(2x)\cos(4x) = \frac{\cos(2x)+\cos(6x)}{2}$)

3. שימוש בזהות $\sin^2 + \cos^2 = 1$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2}dx &= [x = a\sin(t) \Rightarrow dx = a\cos(t)dt,\ x \in (-a,a) \Rightarrow \sin(t) \in (-1,1) \Rightarrow t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})] \\ &= \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2(t)}a\cos(t)dt = a^2 \int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt \\ &= a^2 \int \cos^2(t)dt = a^2 \int \frac{1}{2}(\cos(2t)+1)dt = \frac{a^2}{2}(\frac{\sin(2t)}{2} + t) \\ &= \frac{a^2}{2}(\frac{\sin(2\arcsin(x))}{2} + \arcsin(x))\end{aligned}$$

4. הצבה אוניברסלית ־ $t = \tan(\frac{x}{2})$ ואז $dt = \frac{\frac{1}{2}\cos^2(\frac{x}{2})+\frac{1}{2}\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}dx = \frac{1}{2}(1+t^2)dx$ ($dx = \frac{2}{1+t^2}dt$)

$$\cos(x) = \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{\cos^2(\frac{x}{2})-\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})+\sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-t^t}{1+t^2}$$
$$\sin(x) = 2\cos(\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2}) = \frac{2\cos(\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})+\sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1+t^2}$$

דוגמא

$$\int \frac{dx}{1+\sin(x)+\cos(x)} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2+2t} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| = \ln|1+\tan\frac{x}{2}|$$

טיפול בשורשים (נוסחאת אוילר)

אוילר 1 ־ הפולינום פריק

נניח כי הפולינום $x^2+bx+c=(x-\alpha)(x-\beta)$. פריק

הצבת אוילר: נציב $\sqrt{x^2+bx+c}=t(x-\alpha)$

ואז $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+bx+c=t^2(x-\alpha)^2$

$(x-\beta)=t^2(x-\alpha)$

$x(1-t^2)=\beta-t^2\alpha$ וכו' (שימו לב ־ השורש נעלם!)

1. דוגמה: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$ שני שורשים ולכן הצבה $\sqrt{x^2+3x-4}=t(x+4)$

ומכאן $(x+4)(x-1)=x^2+3x-4=t^2(x+4)^2$

$$x-1=t^2(x+4)$$
$$x(1-t^2)=1+4t^2$$
$$x=\frac{1+4t^2}{1-t^2}\Rightarrow dx=\frac{8t(1-t^2)+2t(1+4t^2)}{(1-t^2)^2}dt=\frac{10t}{(1-t^2)^2}dt$$
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}=\int\frac{1}{t(\frac{1+4t^2}{1-t^2}+4)}\frac{10t}{(1-t^2)^2}dt$$
$$=\int\frac{1}{t(\frac{5}{1-t^2})}\frac{10t}{(1-t^2)^2}dt=\int\frac{1}{5t}\frac{10t}{(1-t^2)}dt$$
$$2\int\frac{1}{1-t^2}dt=2\int\frac{1}{(1-t)(1+t)}dt=2\int\frac{1}{2}[\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}]dt=\ln|1+t|-\ln|1-t|$$
$$=\ln|\frac{1+t}{1-t}|=[t=\frac{\sqrt{(x+4)(x-1)}}{(x+4)}=\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}]=\ln|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}|=\ln|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}|$$

אוילר 2 ־ פולינום לא פריק

ישנן שתי אפשרויות:

- $a>0$ $\sqrt{ax^2+bx+c}$ נציב $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t$
- $c>0$ $\sqrt{ax^2+bx+c}$ נציב $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$

1. דוגמה $\int\frac{dx}{x(\sqrt{x^2-7x+6})}$

ניעזר בהצבת אוילר: $\sqrt{x^2-7x+6}=x+t$

$$x^2-7x+6=x^2+2xt+t^2$$
$$6-t^2=x(2t+7)$$
$$x=\frac{6-t^2}{2t+7}\Rightarrow\sqrt{x^2-7x+6}=\frac{6-t^2}{2t+7}+t=\frac{6+7t+t^2}{2t+7}$$
$$dx=\frac{-2t(2t+7)-2(6-t^2)}{(2t+7)^2}dt=\frac{-2(t^2+7t+6)}{(2t+7)^2}dt$$

ולכן

$$\int\frac{dx}{x(\sqrt{x^2-7x+6})}=\int\frac{1}{\frac{6-t^2}{2t+7}\cdot\frac{6+7t+t^2}{2t+7}}\frac{-2(t^2+7t+6)}{(2t+7)^2}dt=\int\frac{-2}{6-t^2}dt=$$
$$-\frac{2}{6}\int\frac{1}{1-(\frac{t}{\sqrt{6}})^2}dt=[u=\frac{t}{\sqrt{6}}]=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{2}(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u})\sqrt{6}du=-\frac{\sqrt{6}}{6}\ln|\frac{1+u}{1-u}|$$
$$=-\frac{\sqrt{6}}{6}\ln|\frac{1+u}{1-u}|=-\frac{\sqrt{6}}{6}\ln|\frac{1+\frac{t}{\sqrt{6}}}{1-\frac{t}{\sqrt{6}}}|=-\frac{\sqrt{6}}{6}\ln|\frac{\sqrt{6}+t}{\sqrt{6}-t}|=$$
$$=-\frac{\sqrt{6}}{6}\ln|\frac{\sqrt{6}+\sqrt{x^2-7x+6}-x}{\sqrt{6}-\sqrt{x^2-7x+6}+x}|$$

הערה: ע"י החלפת משתנים $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a'x'^2+c'}$. בצורה זאת מתקיים או $a'>0$ או $c'>0$ כי אחרת הביטוי לא מוגדר.

ביטוי רציונאלי הכולל רק $\frac{ax+b}{cx+d}, x$ עם חזקות שונות

בהנתן כזה ביטוי נסמן את החזקות של הביטויים ב $\frac{m_i}{n_i}$
ונציב $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$ כאשר $n = lcm\{n_i\}$

1. $\int \frac{x+(x+4)^{1/2}}{(x+4)+(x+4)^{2/3}} dx$ -
נציב $t^6 = \frac{x+4}{0x+1} = x+4$ ($6 = lcm\{1,2,3\}$)
$6t^5dt = dx$
$$\int \frac{x+(x+4)^{1/2}}{(x+4)^6+(x+4)^{2/3}} dx = \int \frac{t^6-4+t^3}{t^6+t^4} 6t^5 dt = 6\int \frac{t(t^6+t^3-4)}{t^2+1} dt$$
$$= 6\int (t^5 - t^3 + t^2 + t - 1 - \frac{5t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1}) dt$$
$$= 6(\frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t - \frac{5}{2}\ln|t^2+1| + \arctan(t))$$
את ההמרה חזרה ל x נשאיר לכם.

פונקציות היפורבוליות

$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
זהויות :

- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $\cosh^2(x) = \frac{1+\cosh(2x)}{2}$
- $\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x)-1}{2}$
- $\sinh'(x) = \cosh(x)$
- $\cosh'(x) = \sinh(x)$
- $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$
- $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$

דוגמא $\int x^2\sqrt{4+x^2}dx$
נציב $x = 2\sinh(t) \Rightarrow dx = 2\cosh(t)dt$
$$\int x^4\sqrt{4+x^2}dx = 2^2\int \sinh^2(t)\sqrt{4(1+\sinh^2(t))}2\cosh(t)dt$$
$$= 2^4\int \sinh^2(t)\cosh^2(t)dt = 2^2\int (2\sinh(t)\cosh(t))^2 dt$$
$$= 4\int \sinh^2(2t)dt = 4\int \frac{\cosh(4t)-1}{2}dt = 2(\frac{\sinh(4t)}{4} - t)$$
$$= 2(\frac{\sinh(4\sinh^{-1}(\frac{x}{2}))}{4} - \sinh^{-1}(\frac{x}{2}))$$

אינטגראציה של פונקציות רציונאליות

הגדרה: פונקציה (ממשית) רציונאלית $R(x)$ היא פונקציה מהצורה $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ כאשר Q, Pפולינומים.
עובדה: יש אלגוריתם לפתור כל פונקציה רציונאלית!
האלגוריתם:

1. ע"י חלוקת פולינומים ניתן להניח כי $\deg(Q) < \deg(P)$

2. את הפולינום P הממשי ניתן להציג כמכפלה של גורמים אי פריקים מהצורה x^2+bx+c ו $x-\alpha$

3. אם נסמן $P(x)=\prod_i(x-\alpha_i)^{k_i}\prod_i(x^2+b_ix+c_i)^{k_i}$ אז ניתן להציג את $R(x)$ כ $R(x)=\sum_i\frac{A_i}{(x-\alpha_i)^{k_i}}+\sum_i\frac{B_ix+C_i}{(x^2+b_ix+c_i)^{k_i}}$

4. בצורה זאת אנו מגיעים לשברים יסודיים שידוע האינטגראל שלהם

שברים יסודים:

1. $\int\frac{1}{x+\alpha}dx=\ln|x+\alpha|$
2. $\int\frac{1}{(x+\alpha)^k}dx,\ \ k>1=\frac{1}{(1-k)(x+\alpha)^{k-1}}$
3. $\int\frac{2x+b}{x^2+bx+c}dx,\, b^2-4c<0=\ln|x^2+bx+c|$
4. $\int\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k}dx,\, b^2-4c<0,\ \ k>1=\frac{1}{(1-k)(x^2+bx+c)^{k-1}}$
5. $\int\frac{1}{(a^2+x^2)^m}dx=\frac{1}{a^{2m}}\int\frac{1}{(1+(\frac{x}{a})^2)^m}dx=\frac{1}{a^{2m}}\int\frac{1}{(1+(t)^2)^m}adt=\frac{1}{a^{2m-1}}I_m(t)=\frac{1}{a^{2m-1}}I_m(\frac{x}{a})$
6. $\int\frac{1}{(x^2+bx+c)^m}dx=\int\frac{1}{[(x+\frac{b}{2})^2+(-\frac{b}{4}+c)]^m}dx$ ע"י החלפת משתנים מגיעים לצורה מסעיף קודם.

תרגילים

1. $\int\frac{x^4}{1-x^3}dx=\int -x+\frac{x}{1-x^3}dx$. נמשיך עם החלק השני
$\int\frac{x}{1-x^3}dx=\int\frac{x}{(1-x)(1+x+x^2)}dx$
נפרק את $\frac{x}{(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{A}{(1-x)}+\frac{Bx+C}{(1+x+x^2)}$
נכפיל $x=A(1+x+x^2)+(Bx+c)(1-x)$
אפשר לפתוח ומצוא ישירות את A,B. נלך בדרך אחרת־ נציב: (כיוון שהשיוון נכון לפולינום־ הוא גם נכון עבור הצבות בפולינום)
נציב $x=1$ונקבל
$1=3A\Rightarrow A=\frac{1}{3}$
נציב $x=0$
$0=\frac{1}{3}+C\Rightarrow C=-\frac{1}{3}$
נציב $x=2$
$2=\frac{7}{3}-(2B-\frac{1}{3})\ \ \Rightarrow B=\frac{1}{3}$
נמשיך:
$$\int\frac{x}{(1-x)(1+x+x^2)}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1-x}dx+\frac{1}{6}\int\frac{2x-2}{x^2+x+1}dx=$$
$$-\frac{1}{3}\ln|1-x|+\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{6}\int\frac{-3}{x^2+x+1}dx$$
$$=-\frac{1}{3}\ln|1-x|+\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\sqrt{\frac{3}{4}})^2}dx$$
צעד סיום
$$\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\sqrt{\frac{3}{4}})^2}dx=[t=x+\frac{1}{2}]=\int\frac{1}{t^2+(\sqrt{\frac{3}{4}})^2}dt=\frac{4}{3}\int\frac{1}{(\sqrt{\frac{4}{3}}t)^2+1}dt$$
$$=[u=\sqrt{\frac{4}{3}}t]=\sqrt{\frac{4}{3}}\arctan u$$

ובסה"כ

$$\int \frac{x^4}{1-x^3}dx \quad = \quad -\frac{x^2}{2} + -\frac{1}{3}\ln|1-x| + \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\sqrt{\frac{4}{3}}(x+\frac{1}{2}))$$

.2 $\int ‘\frac{27}{(x^2+2)^2(x+1)^2}dx$. נרצה להציג

$‘\frac{27}{(x^2+2)^2(x+1)^2} = \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+2)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+2)^2}$

נכפיל במכנה משותף:

$$27 = A_1(x+1)(x^2+2)^2 + A_2(x^2+2)^2 + (B_1x+C_1)(x^2+2)(x+1)^2 + (B_2x+C_2)(x+1)^2$$

נציב $x=-1$

$27 = 9A_2 \Rightarrow A_2 = 3$

נשווה מקדמים:

	R	L
x^0	27	$4A_1+4A_2+2C_1+C_2$
x^1	0	
x^2	0	
x^3	0	
x^3	0	
x^4	0	$A_1+A_2+C_1+2B_1$
x^5	0	A_1+B_1

נוסיף עוד משוואות ע"י הצבה:

$x=1$

$27 = 18A_1 + 9A_2 + 12B_1 + 12C_1 + 4B_2 + 4C_2$

$x=-2$

$27 = -36A_1 + 36A_2 + -12B_1 + 6C_1 - 2B_2 + C_2$

נקבל מערכת משוואות

$$\begin{pmatrix} 18 & 12 & 4 & 12 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -36 & -12 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ B_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ -81 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נפתור

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 18 & 12 & 4 & 12 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 15 \\ -36 & -12 & -2 & 6 & 1 & -81 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -6 & 4 & 12 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 1 & 15 \\ 0 & 24 & -2 & 6 & 1 & -81 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 4 & 18 & 4 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & -18 & 6 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

ולכן

$$A_1 = 4, B_1 = -4,\ B_2 = -6,\ C_1 = 1,\ C_2 = -3$$

נחזור :

$$\int{}^{\text{‘}}\frac{27}{(x^2+2)^2(x+1)^2}dx = \int{}^{\text{‘}}\frac{4}{(x+1)} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{-4x+1}{(x^2+2)} + \frac{-6x+-3_2}{(x^2+2)^2}dx$$

$$= 4\ln|x+1| - 3\frac{1}{x+1} + -2\int\frac{2x}{x^2+2}dx + \int\frac{1}{x^2+2}dx + -3\int\frac{2x}{(x^2+2)^2}dx + -3\int\frac{1}{(x^2+2)^2}$$

$$= 4\ln|x+1| - 3\frac{1}{x+1} + -2\ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}}I_1(\frac{x}{\sqrt{2}}) + 3\frac{1}{x^2+2} + -3\frac{1}{2^{3/2}}I_2(\frac{x}{\sqrt{2}})$$

ולפי נוסחאת הרקורסיה $I_2(\frac{x}{\sqrt{2}}) = \frac{x}{2(1+\frac{x^2}{2})} + \frac{1}{2}I_1(\frac{x}{\sqrt{2}}),\ \ I_1(\frac{x}{\sqrt{2}}) = \arctan(\frac{x}{\sqrt{2}})$

לסיכום

$$\int{}^{\text{‘}}\frac{27}{(x^2+2)^2(x+1)^2}dx = 4\ln|x+1| - 3\frac{1}{x+1} + -2\ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{2}}) + 3\frac{1}{x^2+2} + -3\frac{1}{2^{3/2}}\frac{x}{2(1+\frac{x^2}{2})} + \frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{\sqrt{2}})$$