

תירגול 3

23 במרץ 2014

שימוש בחקירת פונקציה

תרגיל: הוכח כי אין פתרון למשוואה $e^x = x$
פתרון: שקול להוכיח כי הפונקציה $f(x) = e^x - x$ אינה חותכת את ציר x . נחקור את הפונקציה:
 $f'(x) = e^x - 1$ ולכן יש נקודת קיצון ב $x = 0$. כיוון ש $f''(x) = e^x$ נקבל כי $f''(0) > 1$ ולכן $x = 0$ נקודת מיני.
כיוון ש $f(0) = 1$ נקבל כי $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 1$ בפרט $f(x)$ אינה חותכת את ציר x .

אינטגרל לא מסוים - פונקציה קדומה

הגדרה: $F(x)$ תיקרא פונקציה קדומה של $f(x)$ בקבוצה A אם מתקיים: $\forall x \in A : F'(x) = f(x)$
ההגדרה: האינטגרל הלא מסוים של $f(x)$ הוא אוסף כל הפונקציות. סימון: $\int f(x)dx$
למשל: פונקציה קדומה של $f(x) = x$ בכל הישר היא $F(x) = \frac{x^2}{2}$.
משפט: תהא $f(x)$ פונקציה. אם $F(x), G(x)$ שתי פונקציות קדומות שלה בקבוצה A אזי מתקיים שם $F(x) = G(x) + c$ כאשר c קבוע.
למשל: גם $G(x) = \frac{x^2}{2} + 2$ גם פונקציה קדומה של x . וכל פונקציה קדומה של x היא מהצורה $\frac{x^2}{2} + c$.
טבלאת פונקציות קדומות בכל הישר (ישירות מהגדרה)

$f(x)$	$F(x)$
0	1
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\sqrt{x}
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln x $
$a^x, a > 0$	$\frac{1}{\ln(a)}a^x$
e^x	e^x
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-ctg(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$

הערה: בכל התשובות צריך להוסיף את הקבוע c לתשובה הסופית
דוגמא

$$f(x) = \frac{2x^4}{1+x^2} \quad .1$$

$$f(x) = 2 \frac{x^4-1+1}{1+x^2} = 2 \frac{x^4-1}{1+x^2} + 2 \frac{1}{1+x^2} = 2(1-x^2) + 2 \frac{1}{1+x^2}$$

פתרון

$$\int f(x)dx = 2 \int (1-x^2)dx + 2 \int \frac{1}{1+x^2}dx = 2(x - \frac{x^3}{3}) + 2 \arctan(x) \quad \text{ולכן}$$

שיטת ההצבה

לפי כלל השרשרת מתקיים

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int (F(g(x)))'dx = F(g(x)) + c \quad \text{ולכן}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1\frac{1}{4}} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1\frac{1}{4}} = [t = x + \frac{1}{2} \Rightarrow dt = dx] = \text{השלמה לריבוע} \quad .1$$

$$\int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan(t) = \arctan(x + \frac{1}{2})$$

$$\int xe^{x^2} dx = [t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx] = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}e^{x^2} \quad .2$$

$$\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = [t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\sin(x)dx] = \int \frac{1}{t}(-dt) = \quad .3$$

$$-\ln|t| = -\ln|\cos(x)|$$

$$\int x^3(3x^2-1)^{17}dx = [t = 3x^2-1 \Rightarrow dt = 6xdx] = \int (\frac{t+1}{3})t^{17} \frac{dt}{6} = \frac{1}{18} \int t^{18} + \quad .4$$

$$t^{17}dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \quad a > 0 = \int \frac{1}{\sqrt{a^2}\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}dx = [t = \frac{x}{a} \Rightarrow dt = \frac{1}{a}dx] = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}adt = \quad .5$$

$$\frac{a}{a} \arcsin(t) = \arcsin(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx = [x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt] = \quad .6$$

$$= \int \frac{1}{t}e^t 2tdt = \int 2e^t dt = 2e^t = 2e^{\sqrt{x}}$$

הערה: בשיטת ההצבה אנו מציבים $t = t(x)$. בחלק מהתרגילים מבטאים $x = x(t)$

ואז צריך לוודא שניתן להפוך את הפונקציה לקבלת $t = t(x)$

שיטת אינטגרציה בחלקים

מחוקי הגזירה מתקיים $(f \cdot g)' = f'g + g'f$ ולכן

$$\int g'(x)f(x)dx = \int [f(x)g(x)]'dx - \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\int x \ln(x)dx = [g'(x) = x, f(x) = \ln(x)] = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \quad .1$$

$$\frac{x^2}{4}$$

$$\int x \arctan(x)dx = [u' = x, v = \arctan(x)] = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{1+x^2}dx = \quad .2$$

$$\frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2}(x - \arctan(x)) + c$$

$$F(x) = \int e^x \cos(x)dx = [g'(x) = \cos(x), f(x) = e^x] = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)dx \quad .3$$

$$= [g'(x) = \sin(x), f(x) = e^x] = e^x \sin(x) - (-e^x \cos(x) - \int -e^x \cos(x)dx) =$$

$$e^x(\sin(x) + \cos(x)) - F(x)$$

$$F(x) = \frac{e^x(\sin(x)+\cos(x))}{2} \quad \text{ולכן} \quad 2F(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x)) \quad \text{ש ומכאן}$$

$$I_m(x) = \int \frac{1}{(1+x^2)^m} dx \quad .4$$

$$I_m(x) = [g' = 1, f = \frac{1}{(1+x^2)^m}] = \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^m} dx = x \frac{1}{(1+x^2)^m} - \int \frac{-x(2mx)}{(1+x^2)^{m+1}} dx$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2m \int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{m+1}} dx = \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2m(I_m - I_{m+1})$$

$$I_{m+1} = \frac{x}{2m(1+x^2)^m} + I_m \frac{(2m-1)}{2m} \quad \text{ולכן}$$

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c \quad \text{עם תנאי התחלה}$$

הצבה טריגונומי (גם סינוס/קוסינוס היפורבולי) והצבה אוניברסאלית

1. מכפלה של \cos, \sin שאחד מהם בחזקה אי-זוגית

$$\int \frac{\sin(x)}{\sqrt{2-\cos^2 x}} dx = [t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\sin(x)dx] = \int \frac{-dt}{\sqrt{2-t^2}} = -\arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = -\arcsin\left(\frac{\cos(x)}{\sqrt{2}}\right)$$

2. אם שניהם זוגיים ניתן לפעמים לפשט את הביטוי בעזרת זהויות טרי

$$\int \sin^2(x) \cos^4(x) dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2} \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos(2x))(1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int 1 + \cos(2x) + \cos^2(2x) - 2\cos^3(2x) - \cos^2(2x)\cos(2x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int 1 + \cos(2x) + \frac{1+\cos(2x)}{2} - 2\cos(2x)\left[\frac{1+\cos(4x)}{2}\right] - \frac{1+\cos(2x)}{2} \cos(2x) dx$$

$$\cos(2x)\cos(4x) = +\dots \text{1 ממעלה של דבר ממעלה } \left(\frac{\cos(2x)+\cos(6x)}{2}\right)$$

3. שימוש בזהות $\sin^2 + \cos^2 = 1$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = [x = a \sin(t) \Rightarrow dx = a \cos(t)dt, x \in (-a, a) \Rightarrow \sin(t) \in (-1, 1) \Rightarrow t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)]$$

$$= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(t)} a \cos(t) dt = a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cos(t) dt$$

$$= a^2 \int \cos^2(t) dt = a^2 \int \frac{1}{2}(\cos(2t) + 1) dt = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\sin(2t)}{2} + t\right)$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\frac{\sin(2 \arcsin(x))}{2} + \arcsin(x)\right)$$

4. הצבה אוניברסלית - $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ואז $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin(x) = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

דוגמא

$$\int \frac{dx}{1+\sin(x)+\cos(x)} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2+2t} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| = \ln\left|1 + \tan\frac{x}{2}\right|$$

טיפול בשורשים (נוסחאת אוילר)

אויילר 1 - הפולינום פריק

נניח כי הפולינום $x^2 + bx + c = (x - \alpha)(x - \beta)$ פריק
 הצבת אוילר: נציב $\sqrt{x^2 + bx + c} = t(x - \alpha)$
 ואז $(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + bx + c = t^2(x - \alpha)^2$
 $(x - \beta) = t^2(x - \alpha)$
 $x(1 - t^2) = \beta - t^2\alpha$ (שימו לב - השורש נעלם!)

1. דוגמה: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$ שני שורשים ולכן הצבה $\sqrt{x^2 + 3x - 4} = t(x + 4)$

$$\begin{aligned} (x + 4)(x - 1) &= x^2 + 3x - 4 = t^2(x + 4)^2 \\ x - 1 &= t^2(x + 4) \\ x(1 - t^2) &= 1 + 4t^2 \\ x = \frac{1+4t^2}{1-t^2} &\Rightarrow dx = \frac{8t(1-t^2)+2t(1+4t^2)}{(1-t^2)^2} dt = \frac{10t}{(1-t^2)^2} dt \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}} &= \int \frac{1}{t(\frac{1+4t^2}{1-t^2}+4)} \frac{10t}{(1-t^2)^2} dt \\ &= \int \frac{1}{t(\frac{5}{1-t^2})} \frac{10t}{(1-t^2)^2} dt = \int \frac{1}{5t} \frac{10t}{(1-t^2)^2} dt \\ 2 \int \frac{1}{1-t^2} dt &= 2 \int \frac{1}{(1-t)(1+t)} dt = 2 \int \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right] dt = \ln |1+t| - \ln |1-t| \\ = \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| &= \ln \left| t = \frac{\sqrt{(x+4)(x-1)}}{(x+4)} = \sqrt{\frac{x-1}{x+4}} \right| = \ln \left| \frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}} \right| = \ln \left| \frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}} \right| \end{aligned}$$

אויילר 2 - פולינום לא פריק

ישנן שתי אפשרויות:

- $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t$ נציב $a > 0$
- $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$ נציב $c > 0$

1. דוגמה $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x^2-7x+6})}$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 7x + 6} &= x + t \text{ : ניעזר בהצבת אוילר} \\ x^2 - 7x + 6 &= x^2 + 2xt + t^2 \\ 6 - t^2 &= x(2t + 7) \\ x = \frac{6-t^2}{2t+7} &\Rightarrow \sqrt{x^2 - 7x + 6} = \frac{6-t^2}{2t+7} + t = \frac{6+7t+t^2}{2t+7} \\ dx &= \frac{-2t(2t+7)-2(6-t^2)}{(2t+7)^2} dt = \frac{-2(t^2+7t+6)}{(2t+7)^2} dt \\ \int \frac{dx}{x(\sqrt{x^2-7x+6})} &= \int \frac{1}{\frac{6-t^2}{2t+7} \cdot \frac{6+7t+t^2}{2t+7}} \frac{-2(t^2+7t+6)}{(2t+7)^2} dt = \int \frac{-2}{6-t^2} dt = \\ -\frac{2}{6} \int \frac{1}{1-(\frac{t}{\sqrt{6}})^2} dt &= [u = \frac{t}{\sqrt{6}}] = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) \sqrt{6} du = -\frac{\sqrt{6}}{6} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{6} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| = -\frac{\sqrt{6}}{6} \ln \left| \frac{1+\frac{t}{\sqrt{6}}}{1-\frac{t}{\sqrt{6}}} \right| = -\frac{\sqrt{6}}{6} \ln \left| \frac{\sqrt{6}+t}{\sqrt{6}-t} \right| \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{6} \ln \left| \frac{\sqrt{6}+\sqrt{x^2-7x+6}-x}{\sqrt{6}-\sqrt{x^2-7x+6}+x} \right| \end{aligned}$$

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{-[-ax^2 - bx - c]} \sqrt{-[(\sqrt{-a}x - \frac{b}{2\sqrt{-a}})^2 + (-\frac{b^2}{4a} - c)]}$ אם $a, c < 0$ אז החלפת משתנים
 כיוון ש $b^2 - 4ac < 0$ נקבל כי $c < 0$ כלומר הביטוי $(-\frac{b^2}{4a} - c)$ חיובי ולכן
 $-\frac{b^2}{4a} - c < 0$ חיובי ולכן $[(\sqrt{-a}x - \frac{b}{2\sqrt{-a}})^2 + (-\frac{b^2}{4a} - c)]$ חיובי ולכן
 ואז השורש כלל לא מוגדר!

ביטוי רציונאלי הכולל רק x , עם חזקות שונות

בהנתן כזה ביטוי נסמן את החזקות של הביטויים ב $\frac{m_i}{n_i}$
 ונציב $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$ כאשר $n = lcm\{n_i\}$

$$\begin{aligned}
 & - \int \frac{x+(x+4)^{1/2}}{(x+4)+(x+4)^{2/3}} dx \quad 1. \\
 (6 = lcm\{1, 2, 3\}) \quad t^6 = \frac{x+4}{0x+1} = x+4 & \text{ נציב} \\
 \int \frac{x+(x+4)^{1/2}}{(x+4)^6+(x+4)^{2/3}} dx = \int \frac{t^6-4+t^3}{t^6+t^4} 6t^5 dt = 6 \int \frac{6t^5 dt = dx}{t^6+t^4} dt \\
 = 6 \int (t^5 - t^3 + t^2 + t - 1 - \frac{5t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1}) dt \\
 = 6(\frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t - \frac{5}{2} \ln|t^2+1| + \arctan(t)) \\
 \text{את ההמרה חזרה ל } x \text{ נשאיר לכס.}
 \end{aligned}$$

פונקציות היפרבוליות

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

זהויות :

- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ •
- $\cosh^2(x) = \frac{1+\cosh(2x)}{2}$ •
- $\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x)-1}{2}$ •
- $\sinh'(x) = \cosh(x)$ •
- $\cosh'(x) = \sinh(x)$ •
- $\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$ •
- $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$ •

דוגמא $\int x^2 \sqrt{4+x^2} dx$

$$\begin{aligned}
 x = 2 \sinh(t) \Rightarrow dx = 2 \cosh(t) dt \quad \text{נציב} \\
 \int x^2 \sqrt{4+x^2} dx = 2^2 \int \sinh^2(t) \sqrt{4(1+\sinh^2(t))} 2 \cosh(t) dt \\
 = 2^4 \int \sinh^2(t) \cosh^2(t) dt = 2^2 \int (2 \sinh(t) \cosh(t))^2 dt \\
 = 4 \int \sinh^2(2t) dt = 4 \int \frac{\cosh(4t)-1}{2} dt = 2(\frac{\sinh(4t)}{4} - t) \\
 = 2(\frac{\sinh(4 \sinh^{-1}(\frac{x}{2}))}{4} - \sinh^{-1}(\frac{x}{2}))
 \end{aligned}$$

אינטגרציה של פונקציות רציונאליות

הגדרה: פונקציה (ממשית) רציונאלית $R(x)$ היא פונקציה מהצורה $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ כאשר Q, P פולינומים. עובדה: יש אלגוריתם לפתור כל פונקציה רציונאלית! האלגוריתם:

1. ע"י חלוקת פולינומים ניתן להניח כי $\deg(Q) < \deg(P)$
2. את הפולינום P הממשי ניתן להציג כמכפלה של גורמים אי פריקים מהצורה $x^2 + bx + c$ ו $x - \alpha$
3. אם נסמן $P(x) = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)^{k_i} \prod_{j=1}^m (x^2 + b_j x + c_j)^{l_j}$ אז ניתן להציג את $R(x)$ כ
$$R(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k'_i=1}^{k_i} \frac{A_i}{(x - \alpha_i)^{k'_i}} + \sum_{i=1}^m \sum_{l'_i=1}^{l_i} \frac{B_i x + C_i}{(x^2 + b_i x + c_i)^{l'_i}}$$
4. בצורה זאת אנו מגיעים לשברים יסודיים שידוע האינטגרל שלהם

שברים יסודיים:

1. $\int \frac{1}{x + \alpha} dx = \ln |x + \alpha|$
2. $\int \frac{1}{(x + \alpha)^k} dx, k > 1 = \frac{1}{(1 - k)(x + \alpha)^{k-1}}$
3. $\int \frac{2x + b}{x^2 + bx + c} dx, b^2 - 4c < 0 = \ln |x^2 + bx + c|$
4. $\int \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^k} dx, b^2 - 4c < 0, k > 1 = \frac{1}{(1 - k)(x^2 + bx + c)^{k-1}}$
5. $\int \frac{1}{(a^2 + x^2)^m} dx = \frac{1}{a^{2m}} \int \frac{1}{(1 + (\frac{x}{a})^2)^m} dx = \frac{1}{a^{2m}} \int \frac{1}{(1 + (t)^2)^m} a dt = \frac{1}{a^{2m-1}} I_m(t) = \frac{1}{a^{2m-1}} I_m(\frac{x}{a})$
6. $\int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^m} dx = \int \frac{1}{[(x + \frac{b}{2})^2 + (-\frac{b}{4} + c)]^m} dx$ מסעיף קודם.

תרגילים

1. $\int \frac{x^4}{1 - x^3} dx = \int -x + \frac{x}{1 - x^3} dx$ נמשיך עם החלק השני $\int \frac{x}{1 - x^3} dx = \int \frac{x}{(1 - x)(1 + x + x^2)} dx$ נפרק את $\frac{x}{(1 - x)(1 + x + x^2)} = \frac{A}{(1 - x)} + \frac{Bx + C}{(1 + x + x^2)}$ נכפיל $x = A(1 + x + x^2) + (Bx + c)(1 - x)$ אפשר לפתוח ומצוא ישירות את A, B . נלך בדרך אחרת - נציב: (כיוון שהשיוון נכון לפולינום - הוא גם נכון עבור הצבות בפולינום) נציב $x = 1$ ונקבל $1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$ נציב $x = 0$ $0 = \frac{1}{3} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{3}$ נציב $x = 2$ $2 = \frac{7}{3} - (2B - \frac{1}{3}) \Rightarrow B = \frac{1}{3}$

נמשיך:

$$\int \frac{x}{(1-x)(1+x+x^2)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{1-x} dx + \frac{1}{6} \int \frac{2x-2}{x^2+x+1} dx =$$

$$-\frac{1}{3} \ln |1-x| + \frac{1}{6} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{6} \int \frac{-3}{x^2+x+1} dx$$

$$= -\frac{1}{3} \ln |1-x| + \frac{1}{6} \ln |x^2+x+1| - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{4})^2} dx$$

צעד סיום

$$\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{4})^2} dx = [t = x + \frac{1}{2}] = \int \frac{1}{t^2+(\frac{\sqrt{3}}{4})^2} dt = \frac{4}{3} \int \frac{1}{(\frac{\sqrt{4}}{3}t)^2+1} dt$$

$$= [u = \sqrt{\frac{4}{3}}t] = \sqrt{\frac{4}{3}} \arctan u$$

ובסה"כ

$$\int \frac{x^4}{1-x^3} dx = -\frac{x^2}{2} + -\frac{1}{3} \ln |1-x| + \frac{1}{6} \ln |x^2+x+1| - \frac{1}{2} (\sqrt{\frac{4}{3}} \arctan \sqrt{\frac{4}{3}}(x + \frac{1}{2}))$$

2. נרצה להציג $\int \frac{27}{(x^2+2)^2(x+1)^2} dx$

$$\frac{27}{(x^2+2)^2(x+1)^2} = \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+2)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+2)^2}$$

נכפיל במכנה משותף:

$$27 = A_1(x+1)(x^2+2)^2 + A_2(x^2+2)^2 + (B_1x+C_1)(x^2+2)(x+1)^2 + (B_2x+C_2)(x+1)^2$$

נציב $x = -1$

$$27 = 9A_2 \Rightarrow A_2 = 3$$

	R	L
x^0	27	$4A_1 + 4A_2 + 2C_1 + C_2$
x^1	0	
x^2	0	
x^3	0	
x^4	0	$A_1 + A_2 + C_1 + 2B_1$
x^5	0	$A_1 + B_1$

נשווה מקדמים:

נוסיף עוד משוואות ע"י הצבה:

$$x = 1$$

$$27 = 18A_1 + 9A_2 + 12B_1 + 12C_1 + 4B_2 + 4C_2$$

$$x = -2$$

$$27 = -36A_1 + 36A_2 + -12B_1 + 6C_1 - 2B_2 + C_2$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 12 & 4 & 12 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -36 & -12 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ B_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ -81 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נקבל מערכת משוואות

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccccc|c} 18 & 12 & 4 & 12 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 15 \\ -36 & -12 & -2 & 6 & 1 & -81 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -6 & 4 & 12 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 1 & 15 \\ 0 & 24 & -2 & 6 & 1 & -81 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{נפתור} \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 4 & 18 & 4 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & -18 & 6 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -18 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

ולכן

$$A_1 = 4, B_1 = -4, B_2 = -6, C_1 = 1, C_2 = -3$$

נחזור :

$$\begin{aligned}
& \int \frac{27}{(x^2+2)^2(x+1)^2} dx = \int \left(\frac{4}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{-4x+1}{x^2+2} + \frac{-6x+3}{(x^2+2)^2} \right) dx \\
& = 4 \ln|x+1| - 3 \frac{1}{x+1} - 2 \int \frac{2x}{x^2+2} dx + \int \frac{1}{x^2+2} dx - 3 \int \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx - 3 \int \frac{1}{(x^2+2)^2} dx \\
& = 4 \ln|x+1| - 3 \frac{1}{x+1} - 2 \ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}} I_1\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + 3 \frac{1}{x^2+2} - 3 \frac{1}{2^{3/2}} I_2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \\
& I_2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{2(1+\frac{x^2}{2})} + \frac{1}{2} I_1\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad I_1\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \text{ ולפי נוסחאת הרקורסיה}
\end{aligned}$$

לסיכום

$$\begin{aligned}
\int \frac{27}{(x^2+2)^2(x+1)^2} dx = & 4 \ln|x+1| - 3 \frac{1}{x+1} - 2 \ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \\
& 3 \frac{1}{x^2+2} - 3 \frac{1}{2^{3/2}} \frac{x}{2(1+\frac{x^2}{2})} + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$