פתרון

1. חשבו את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות לפי תמורות:

א. $\begin{matrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 5 \end{matrix}$ מעל $\mathbb{R}$ ב. $\begin{matrix} 2 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 4 \end{matrix}$ מעל $\mathbb{Z}_7$

פתרון: התמורות בS_3 הן: $(1)(2)(3), (1,2)(3), (1,3)(2), (2,3)(1), (1,2,3), (1,3,2)$ והסימנים שלהן בהתהאמה הן: $1,-1,-1,-1,1,1$. לכן אם המטריצה שלנו היא A והרכיבים בה הם $a_{i,j}$ מה שאנחנו צריכים לחשב הוא: $a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{3,1}a_{2,2} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{3,2}a_{2,1}$

א. נציב את איברי המטריצה בנוסחא שקיבלנו ונקבל: $3\cdot0\cdot5 - 1\cdot4\cdot5 - 5\cdot0\cdot(-1) - 3\cdot6\cdot3 + 1\cdot6\cdot(-1) + 5\cdot3\cdot4 = -20$

ב. נציב את איברי המטריצה בנוסחא שקיבלנו: $2\cdot1\cdot4 - 6\cdot5\cdot4 - 3\cdot1\cdot3 - 2\cdot0\cdot6 + 6\cdot0\cdot3 + 3\cdot6\cdot5 = -31 mod 7 = 4$

2. חשבו את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות לפי הנוסחא

א. $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} 11 & 2 & 7 \\ -5 & 3 & 9 \\ -2 & 4 & 1 \end{matrix}$

פתרון: א. הנוסחא למטריצות 2 על 2 היא: $1\cdot8 - 2\cdot5 = -2$

הנוסחא למטריצות 3 על 3 היא: $11\cdot3\cdot1 + 2\cdot9\cdot2 + 7\cdot(-5)\cdot4 - 7\cdot3\cdot(-2) - 11\cdot9\cdot4 - 2\cdot(-5)\cdot1 = -415$

3. חשבו את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות לפי מינורים (פיתוח לפי שורה או עמודה)

א. $\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & -1 & 6 & 9 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} 2 & 0 & 12 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 8 & 6 \end{matrix}$

פתרון: א. נשים לב שהכי נח להשתמש בעמודה הראשונה כי יש בה שני אפסים. בכל שלב נגיע למטריצה 3 על 3 שאת הדטרמיננטה שלה אנחנו כבר יודעים לחשב לפי נוסחא.

$$det(A)=1\cdot\begin{vmatrix}3&1&8\\-1&6&9\\7&2&3\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}2&0&5\\-1&6&9\\7&2&3\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}2&0&5\\3&1&8\\7&2&3\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}2&0&5\\3&1&8\\-1&6&9\end{vmatrix}=$$
$$1\cdot(-286)+4\cdot(-58)=-518$$

ב. נשים לב שהכי נח להשתמש בשורה הראשונה כי יש בה שני אפסים. נקבל:

$$det(A)=2\begin{vmatrix}1&0&3\\4&2&5\\3&8&6\end{vmatrix}+12\cdot\begin{vmatrix}1&1&3\\0&4&5\\7&3&6\end{vmatrix}=2\cdot50+12\cdot(-40)=-380$$

4. חשבו את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות לפי דירוג:

א. $\begin{matrix}1&2&3&4\\0&1&2&1\\1&3&5&0\\2&3&0&33\end{matrix}$ ב. $\begin{matrix}0&2&3\\4&10&7\\5&6&0\end{matrix}$

פתרון: א. נדרג את המטריצה עד שנגיע לצורה משולשית, ושם נעצור. נבדוק מה הפעולות שעשינו במהלך הדירוג, כדי לחלץ את הדטרמיננטה המקורית מהדטרמיננטה של המטריצה המשולשית. (תזכורת: דטרמיננטה של מטריצה משולשית היא מכפלת איברי האלכסון).

$$\begin{matrix}1&2&3&4\\0&1&2&1\\1&3&5&0\\2&3&0&33\end{matrix}\Longrightarrow\begin{matrix}1&2&3&4\\0&1&2&1\\0&1&2&-4\\0&-1&-6&25\end{matrix}\Longrightarrow\begin{matrix}1&2&3&4\\0&1&2&1\\0&0&0&-5\\0&0&-4&26\end{matrix}\Longrightarrow\begin{matrix}1&2&3&4\\0&1&2&1\\0&0&-4&26\\0&0&0&-5\end{matrix}$$

הדטרמיננטה של המטריצה המשולשית היא $1\cdot1\cdot(-4)\cdot(-5)=20$ נשים לב שכל הפעולות שעשינו לא משנות את הדטרמיננטה, למעט החלפת שורה אחת. לכן $det(A)=-20$

ב. $$\begin{matrix}0&2&3\\4&10&7\\5&6&0\end{matrix}\Longrightarrow\begin{matrix}4&10&7\\0&2&3\\5&6&0\end{matrix}\Longrightarrow\begin{matrix}4&10&7\\0&2&3\\0&-6.5&-8.75\end{matrix}\Longrightarrow\begin{matrix}4&10&7\\0&2&3\\0&0&1\end{matrix}$$

הדטרמיננטה של המטריצה המשולשית היא $4\cdot2\cdot1=8$ כל הפעולות שביצענו לא משנות את הדטרמיננטה למעט החלפת שורה אחת, לכן $det(A)=-8$

5. א. חשב את הדטרמיננטה של: $\begin{matrix}0&\cdots&1\\\vdots&\iddots&\vdots\\1&\cdots&0\end{matrix}$. במילים: $A\in M_n(\mathbb{R})$ (מטריצה בגודל $n\times n$) כך ש: $A_{i,n+1-i}=1$ וכל שאר הרכיבים הם 0.

פתרון: נבצע החלפת שורות במטריצה עד שנקבל את מטריצת היחידה, שהדטרמיננטה

שלה היא 1. השאלה: כמה החלפות שורה נצטרך? (השורה האחרונה מתחלפת עם הראשונה, השורה השניה עם השורה הלפני אחרונה, וכו'). התשובה היא שאם n זוגי נבצע בדיוק $\frac{n}{2}$ החלפות, ואם n אי זוגי, אז את השורה האמצעית לא צריך להחליף, לכן נבצע $\frac{n-1}{2}$ החלפות. כלומר, בכל מקרה נבצע $[\frac{n}{2}]$ (עיגול לשלם הקרוב מלמטה) החלפות. לכן $det(A)=(-1)^{[\frac{n}{2}]}$

ב. חשבו את הדטרמיננטה של: $\begin{matrix} 11 & 27 & 39 & 5 & 61 \\ 21 & 14 & 87 & 3 & 1 \\ 90 & 123 & 456 & -17 & -4 \\ 11 & 27 & 39 & 5 & 61 \\ -2 & 8 & 6 & -5 & 334 \end{matrix}$. (רמז: אם החישוב לוקח לכם יותר מדי זמן, כנראה שיש דרך פשוטה יותר)

פתרון: נשים לב שיש שתי שורות זהות, לכן אם נחסר אחת מהשניה (פעולה שלא משנה את הדטרמיננטה) נקבל מטריצה עם שורת אפסים, שהדטרמיננטה שלה היא כמובן 0, כי אפשר לפתח את הדטרמיננטה לפי אותה שורה. לכן, $det(A)=0$

6. תהי $A\in F^{n\times n}$ עבור n אי זוגי. בנוסף, A אנטי סימטרית. (כלומר, $A=-A^t$)

א. הוכיחו: אם $charF\neq 2$ אז $|A|=0$.

ב. האם הטענה נכונה גם במאפיין 2?

פתרון: א. נזכור ש $det(A)=det(A^t)$. כמו כן, $det(-A^t)=(-1)^n det(A^t)$, כי כל שורה שמכפילים אותה ב-1 מכפילה את הדטרמיננטה ב-1. מכיוון שנתון ש n אי זוגי, נקבל: $det(A)=det(-A^t)=-det(A^t)=-det(A)$. כלומר, $2det(A)=0$. ומכיוון שהמאפיין שונה מ2 זה גורר $det(A)=0$.

ב. לא. נקח למשל: $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ במאפיין 2 זאת מטריצה אנטי־סימטרית (כי 1 הוא הנגדי של עצמו) אבל הדטרמיננטה שלה היא כמובן 0.

7. תהי $A\in R^{n\times n}$ כך שלכk i,j $A_{i,j}\in\{1,-1\}$ (כלומר, כל האיברים במטריצה הם 1 או ־1).

הוכיחו ש$det(A)$ זוגית.

(רמז: ניתן להשתמש באינדוקציה)

פתרון: מטריצה 2 על 2 מסוג כזה יכולה או להיות עם שתי שורות תלויות, ואז הדטרמיננטה שלה היא 0 (כי אחת השורות תתאפס) או ששתי השורות בת"ל, ואז היא שווה למטריצה $\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$ עד כדי כפולה של אחת השורות או שתיהן ב-1. במקרה הזה ניתן לחשב ולראות שהדטרמיננטה יוצאת ± 2 ובפרט זוגית.

כעת, נניח שהטענה נכונה למטריצה $n\times n$ ונסתכל על מטריצה $n+1\times n+1$. ניתן לפתח את הדטרמיננטה לפי אחת השורות, למשל השורה הראשונה, ונקבל $\sum a_{1,j}|M_{1,j}|$. לכל j , $M_{1,j}$ היא מטריצה מגודל $n \times n$ שמורכבת מ $\{1,-1\}$ ולכן לפי הנחת האינדוקציה הדטרמיננטה שלה זוגית. קיבלנו שהדטרמיננטה של המטריצה היא סכום של דבריים זוגים, שהוא כמובן גם זוגי. מש"ל

8.א. הוכיחו שלא קיימת מטריצה $A \in M_2(\mathbb{R})$ (כלומר מטריצה מגודל 2 על 2 שכל רכיביה מ$\mathbb{R}$) כך ש: $A^2 = \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$

(רמז: השתמשו בדטרמיננטות)

פתרון: נניח בשלילה שיש מטריצה A כזאת. אז מתקיים: $|A^2| = |\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}|$. מכייון שהדטרמיננטה כיפלית נקבל: $|A|^2 = -1$ אבל מכייון שאנחנו ב $\mathbb{R}$ לא קיים מספר שבריבוע שווה ל -1 . סתירה.

ב. האם הטענה נכונה גם מעל $\mathbb{C}$?

פתרון: לא. קיימת מטריצה כזאת. למשל: $\begin{matrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$