טיפים ורמזים לשיעורי בית

1. על מנת להראות שקבוצה היא פתוחה, לעיתים קל יותר להראות שהמשלים הוא סגור.

2. על מנת להראות שקבוצה היא סגורה, לעיתים קרובות כדאי להשתמש במשפט שאומר ש X סגורה אם ורק אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב X שמתכנסת ל x, $x \in X$. (מכילה את כל הגבולות של סדרות בתוכה שתנכסות).

3. סדרה ב $\mathbb{R}^n$ מתכנסת אם ורק אם מתכנסת רכיב רכיב. (כך מראים שקבוצה היא סגורה).

4. אם רוצים להוכיח פתיחות של קבוצה ישירות, הראות ישירות, מספיק להרות שלכל נקודה יש סביבה כדור פתוח בנורמת מקסימום. (ראינו בתרגולים שנורמה הסטנדרטית, נורמה 1 ונורמת אינסוף הן שקולות).

5. כאשר קבוצה מוגדרת על משוואות מהצורה $\{x|f(x) > a, g(x) \neq b\}$, אם מופיע $\leq, \geq, =$ באילוץ, הקבוצה, ברוב המקרים הקבוצה תהיה סגורה. ואם מופיע $<, >, \neq$ ברוב המקרים הקבוצה תהיה פתוחה. (שימו לב, הכוונה כאם ש f, g הן פונקציות רציפות. אילוץ מהצורה $a^n, n \in \mathbb{N}, n \neq 3, 4, 5$ הוא לא אילוץ מהצורה שתיארנו).

6. לעיתים, קל יותר לתאר קבוצה על ידי איחוד או חיתוך של קבוצות פשטות יותר. למשל

$$\left\{(x,y)\,|x^2+y=3 \wedge x^3+y^2 \geq 4\right\}$$

אפשר להציג בתור

$$\left\{(x,y)\,|x^2+y=3\right\} \cap \left\{(x,y)\,|x^3+y^2 \geq 4\right\}$$

ולהראות שכל קבוצה בחיתוך היא סגורה.

7. קבוצה חסומה אם ורק אם היא חסומה רכיב-רכיב.

8. קבוצה היא קומפקטית ב $\mathbb{R}^n$ אם ורק אם חסומה וסגורה.

9. כשאתם לא בטוחים אם מדובר בהוכחה או הפרכה, תנסו דוגמאות פשוטות. אם טענה לא עובדת עבור אחת מהדוגמאות הפשוטות שניסיתם, מדובר בהפכרה. (למשל, מה היא הקבוצה הכי פשוטה שאפשר לחשוב עליה שהיא לא קבוצה סגורה? מה היא פונקציה הכי פשוטה שאפשר לחשוב עליה?). מה היא הקבוצה הכי פשוטה שיש לה נקודת הצטברות? האם הטענה נכונה גם במקרה הזה?

10. כשאתם מקבלים קבוצה "מוזרה", תנסו להבין איך היא נראית. לצורכנו, האם יש נקודות שהן פנימיות? מבודדות? מי הן נקודות הצטברות של הקבוצה? למשל, דרך נוספת לחשוב על נקודות הצטברות של קבוצה בנוסף לגבולות, היא באופן הבא: p היא נקודת הצטברות של A אם ניתן לקרב אותה על ידי איברים של A. דוגמה: כל מספר ממשי, אפשר לקרב על ידי מספר רציונלי. כל מספר ממשי ב $[0,1]$, אפשר לקרב על ידי טור מהצורה

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n k^{-n}$$

כאשר ו k הוא מספר טבעי, $a_n \in \{0,1,\ldots,k-1\}$ ולכן כל $x \in [0,1]$ הוא נקודת הצטברות של סכומים סופיים מהצורה

$$.x = \sum_{n=1}^{N} a_n k^{-n}$$

11. כמובו שהרשימה לא ממצא את כל השיטות האפשריות, ואם מצאתם דרך נוחה יותר להראות טענה מסויימת, השתמשו בה.