תרגיל בית 2

1. בטופולוגיה, קבוצה A תקרא מושלמת (Perfect set) אם ניתן להתקרב ככל שנרצה לכל $x \in A$ ע"י איברים מ A. במילים אחרות קבוצה היא מושלמת אם אין לה נקודות מבודדות.

א. הראו כי קבוצת קנטור C הינה מושלמת.

בטופולוגיה, קבוצה A תקרא דלילה (nowhere dense set) אם $Int\left(Cl\left(A\right)\right)=\varnothing$. במילים, A תקרא דלילה אם הפנים של הסגור של A הינה קבוצה ריקה.

ב. הראו כי קבוצת קנטור C אותה ראינו בתרגול הינה דלילה.

2. ראינו בתירגול שאם המידה של קבוצה סגורה (קבוצת קנטור למשל) הינה 0 אז היא איננה יכולה להכיל אף קטע פתוח. האם הכיוון השני נכון גם כן? האם קבוצה דלילה בהכרח תהיה בעלת מידה 0?

נבנה דוגמה נגדית. תהי $\left\{c_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ סדרה של מספרים ממשיים חיוביים כך ש $0<\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}c_k<1$ בדומה לאופן בו בנינו את קבוצת קנטור C, נוריד ממרכז הקטע $[0,1]$ קטע באורך c_k על מנת לקבל את הקבוצה $\widehat{C}_1$. כעת נוריד ממרכז כל אחד משני הקטעים שנשארו קטעים באורך c_2 על מנת לקבל את הקבוצה $\widehat{C}_2$. בשלב ה k נוריד 2^{k-1} קטעים ממרכז כל אחד מהקטעים שנשארו מהשלב ה $k-1$ על מנת לקבל את הקבוצה $\widehat{C}_k$. נגדיר את $\widehat{C}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\widehat{C}_k$ להיות קבוצת קנטור המוכללת.

א. הראו כי $\widehat{C}$ קבוצת קנטור המוכללת הינה קומפקטית ומושלמת.

ב. הראו כי $\widehat{C}$ הינה דלילה.

ג. הראו כי $m\left(\widehat{C}\right)=1-\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}c_k$.

רמז : השתמשו בעובדה כי מידה היא "רציפה". כלומר , אם $\left\{A_n\right\}$ סדרה של קבוצות כך ש $A_k\supseteq A_{k+1}$ ו $m\left(A_1\right)<\infty$ אזי $m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\lim_{n\to\infty}m\left(A_n\right)$.

3. תהי m מידת לבג. נניח כי לכל n A_n הינה קבוצה מדידה ב $[0,1]$. תהי B קבוצת כל ה x -ים המופיעים באינסוף קבוצות A_n .

א. הראו כי B הינה מדידה לבג.(רמז: הציגו את B כך $B=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n$)

ב. אם $m(A_n)>\delta>0$ לכל n , הראו כי $m(B)>\delta$.

ג. אם $\sum_{i=1}^{\infty}m(A_n)<\infty$ אז $m(B)=0$.

ד. תנו דוגמא למקרה בו $\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)=\infty$ אבל $m(B)=0$.

4. יהיו $\mathfrak{A}_1$ ו $\mathfrak{A}_2$ שתי משפחות של קבוצות ב X . הראו כי אם $\mathfrak{A}_1\subseteq\mathfrak{A}_2\subseteq\sigma(\mathfrak{A}_1)$ אזי נובע כי $\sigma(\mathfrak{A}_1)=\sigma(\mathfrak{A}_2)$.