

תרגיל בית מס' 9

21 בינואר 2013

1 מיון חבורות אבליות סופיות

יש לפתור את שאלות 1 ו-2, ולבחור שתיים משאלות 3-5.

1. חשבו כמה חבורות אבליות שונות, עד כדי איזומורפיזם, יש מהסדרים הרשומים להלן. אין צורך לפרט את רשימת החבורות, אלא רק לחשב את מספרן.

(א) מסדר 100.

(ב) מסדר 1155.

(ג) מסדר 42875.

2. מיינו את כל החבורות האבליות השונות, עד כדי איזומורפיזם, מהסדרים הרשומים להלן. כאן אתם מתבקשים לפרט את הרשימה.

(א) מסדר 270.

(ב) מסדר 9801.

3. תהי G חבורה אבלית מסדר 72, אשר יש בה בדיוק 3 איברים מסדר 2 ויש 7 איברים או פחות מסדר 3. מצאו את G .

4. מצאו מבין רשימת החבורות הבאה אילו חבורות איזומורפיות זו לזו.

(א) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{18}; \mathbb{Z}_{36}; \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9; \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$

(ב) $\mathbb{Z}_{2^3} \times \mathbb{Z}_{3^2}; \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2}; \mathbb{Z}_{2 \cdot 3} \times \mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3}; \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{2 \cdot 3^2}$

5. תהי $G = \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{45} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{42}$. מצאו כמה איברים מסדר 2 יש ב- G .

2 מכפלה פנימית ישרה

1. יהי F שדה, ותהי

$$G = \{(a_{ij}) \in GL_n(F) : \text{If } i > j \text{ then } a_{ij} = 0, a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn}\}$$

חבורת המטריצות המשולשיות עליונות מעל השדה F , אשר איברי האלכסון שלהן הם סקלר קבוע שאינו אפס. נסמן $D = \{\alpha \cdot I : \alpha \neq 0\}$ את חבורת המטריצות הסקלריות שאינן אפס, ונסמן U את חבורת המטריצות המשולשיות עליונות עם אלכסון של 1-ים. הוכיחו כי $G \cong D \times U$.

2. עבור G מהסעיפים להלן, מצאו האם ל- G יש תת-חבורות ממש H ו- K , כך שהמכפלה הפנימית HK היא ישרה ומתקיים $G = HK$.

(א) $G = \mathbb{Z}_4$

(ב) $G = \mathbb{Z}_6$

(ג) $G = \mathbb{Z}$

(ד) $G = Q_8$

(ה) $G = D_{12}$

תזכורת: תת-חבורה ממש של G היא תת-חבורה של G שאיננה החבורה הטריטויאלית ואיננה G בעצמה.

הדרכה: מכפלה פנימית היא ישרה רק אם היא מכפלה של תת-חבורות נורמליות. לכן חפשו תת-חבורות נורמליות של G , ובדקו האם מכפלתן היא ישרה ושווה ל- G .