אנליזה מודרנית 1 תרגול 12

15 בינואר 2015

0.1 מרחב ℓ^p $(I, \mathbb{A}, \mu)$

I קבוצה $\mathbb{A} = \mathbb{P}(I)$, μ מידת הספירה מעל $\mathbb{A}$.

$$\ell^p(I) := L^p(\mu)$$

במקרה הפרטי $I = \mathbb{N}$.

$$\ell^p := \ell^p(\mathbb{N})$$

פו' מ-$\mathbb{N}$ל-$\mathbb{C}$ תסומן $(x_i)_{\mathbb{N}}$, x_Nהוא ערך הפו' ב-i. כל פו' שכזו מדידה $\mathbb{A}$. שיוויון כאן שקול לשיוויון כב"מ. חסם מלעיל שקול לesssup (כי $0 = \mu(E) \Leftarrow E = \emptyset$) ולכן

$$\|(x_i)_{\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{\mathbb{N}} |x_i|$$

ועבור $p < \infty$:

$$\int_{\mathbb{N}} |(x_i)|^p \, d\mu = \sum_{\mathbb{N}} |x_i|^p$$

בעזרת ההתכנסות המונוטונית

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^p = \sup_{\text{finite} T\subset\mathbb{N}} \sum_{i\in T} |x_i|^p = \sup_{\text{finite} T} \int_T |x_i|^p \, d\mu$$

$$\begin{aligned} \ell^p &= \left\{ (x_i)_{\mathbb{N}} \middle| \forall i \in \mathbb{N}, x_i \in \mathbb{C}, \|(x_i)\|_p < \infty \right\} \\ \|(x_i)_{\mathbb{N}}\|_\infty &= \sup_{\mathbb{N}} |x_i| \end{aligned}$$

כשלכל $0 < p < \infty$:

$$\|(x_i)\|_p = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

אי"ש $H\ddot{o}lder$ (עבור $1 \le p \le \infty$):

$$p^{-1} + q^{-1} = 1 \Rightarrow \sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i y_i| \le \|(x_i)_{\mathbb{N}}\|_p \|(y_i)_{\mathbb{N}}\|_q$$

מקרה פרטי: $I=\{1,\ldots,n\}$.

$$\left(\mathbb{C}^n,\|\cdot\|_p\right)=\ell^p\left(\{1,\ldots,n\}\right)$$

פונקציה $(x_i)_{1\le i\le n}$: מ$\{1,\ldots,n\}$ ל־$\mathbb{C}$ נזהה אותה עם הn יה הסדורה $(x_1,\ldots x_n)\in\mathbb{C}^n$.

$$\left\|(x_i)_{1\le i\le n}\right\|_p=\left(\sum_1^n|x_i|^p\right)^{1/p}\qquad 1\le p<\infty$$

$$\left\|(x_i)_{1\le i\le n}\right\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

תרגיל:

הוכיחו:

$$1\le r<p<\infty\Leftarrow \ell^r\subsetneq\ell^p$$

הוכחה:

תהי $a=(a_n)_{\mathbb{N}}\in\ell^r$ אזי:

$$\begin{aligned}(1)\quad \sum_{n=1}^\infty|a_n|^r &< \infty\\ (2)\quad \sum_{n=1}^\infty|a_n|^p &= \sum_{n=1}^\infty|a_n|^r|a_n|^{p-r}\end{aligned}$$

לפי (1) קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$, $|a_n|^r<1$ ולכן לכל $n>n_0$, $|a_n|<1$ $>|a_n|^{p-1}$ $\Leftarrow 1$. מכאן לפי (2) ולפי מבחני ההשוואה (בנוסח אם ממקו מסוים ואילך $|b_n|\le|c_n|$ אז $\sum_1^\infty|b_n|<\infty$). עבור $|c_n|=|a_n|^r$

$$\sum_1^\infty|a_n|^p<\infty\Rightarrow a\in\ell^p\Rightarrow\ell^r\subseteq\ell^p$$

נוכיח כי ההכלה אמיתית. נגדיר $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ע"י

$$\forall n\in\mathbb{N},a_n:=\left(\frac{1}{n}\right)^{1/r}$$

אזי

$$|a_n|^r=\frac{1}{n}\Rightarrow\|a_n\|_r^r=\sum\frac{1}{n}=\infty$$

ולכן $a\in\ell^r$. לע"ז:

$$1<\frac{p}{r}\qquad |a_n|^p=\frac{1}{n^{p/r}}\Rightarrow\|a\|_p^p=\sum_1^\infty\frac{1}{n^{p/r}}<\infty$$

ו$a\in\ell^p$. $\ell^r\subsetneq\ell^p$.

תרגיל

הוכיחו: אם $1 \le p < \infty$ אזי

$$\begin{aligned} a_n : &= n^{-1/p}\left(1+\log n\right)^{-2/p} \\ a &:= (a_n)_{\mathbb{N}} \end{aligned}$$

אזי

$$a \in \ell^p - \bigcup_{1\le r<p} \ell^r$$

$\Leftarrow \bigcup_{1\le r<p} \ell^r \subsetneq \ell^p$.

הוכחה:

$$\sum_{n=10}^{\infty}|a_n|^p = \sum_{10}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(1+\log n\right)^2} \le \sum_{10}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{\left(\log n\right)^2} < \infty \Rightarrow a \in \ell^p$$

יהי $1 \le r < p$.

$$\begin{aligned} \sum_{10}^{\infty}|a_n|^r &= \sum_{10}^{\infty}\frac{1}{n^{r/p}}\frac{1}{\left(1+\log n\right)^{\frac{2r}{p}}} \\ 0<\frac{r}{p}<1 \qquad &= \sum_{10}^{\infty}\frac{1}{n}\underbrace{\frac{n^{1-\frac{r}{p}}}{\left(1+\log n\right)^{2r/p}}}_{\to\infty} \end{aligned}$$

לכן לכל $n > n_0$, $|a_n|^n \ge \frac{1}{n}$ וכיוון ש$\sum\frac{1}{n}=\infty$ הרי $\sum|a_n|^r=\infty$ ו$a \notin \ell^r$ וזאת לכל $1 \le r < p$.

טענה:

יהי $\mathcal{H}$מרחב הילברט ויהי M תת מרחב לינארי סגור ב$\mathcal{H}$.תהי $f \in \mathcal{H}$ אזי

$$d\left(f,M\right) = \sup\left\{\langle f,g\rangle \middle| g \in M^{\perp}, \|g\|=1\right\}$$

$$\left[d\left(f,M\right) := \inf\left\{\|x-z\| \mid z \in M\right\}\right]$$

כשבמקרה זה הsupהוא הmaxוהinf הוא הmin.

הוכחה:

לפי הגדרת $d\left(f,M\right)$כinf וכיוון שM סגור (ב$\mathcal{H}$ הילברט), הinf הוא min. יהי $g \in M^{\perp}$ כך ש$\|g\|=1$ אז לכל $t \in M$

$$|\langle f,g\rangle| = |\langle f-t+t,g\rangle| = \left|\langle f-t,g\rangle + \underbrace{\langle t,g\rangle}_{=0}\right| = |\langle f-t,g\rangle| \overset{\text{c.s}}{\le} \|f-t\|\,\|g\| = \|f-t\|$$

לכן, לכל $t\in M$

$$\alpha\leq\|f-t\|\Rightarrow\alpha\leq\inf_{t\in M}\|f-t\|=d\left(f,M\right)$$

מכיוון שM תת מרחב לינארי סגור של מרחב הילברט אז $f\in\mathcal{H}=M\oplus M^{\perp}$ לכן קיימים $g_1\in M^{\perp}$, $t_1\in M$ כך ש:

$$f=g_1+t_1$$

אם $f\in M$ אז $d\left(f,M\right)=0$ ולכל $g\in M^{\perp}$,

$$\left|\left\langle f,g\right\rangle\right|=0$$

לכן במקרה זה $\alpha=d\left(f,M\right)=0$. אם $M\neq\mathcal{H}$ נקבע $0\neq g_0\in M^{\perp}$.

$$g:=\frac{g_0}{\|g_0\|}$$

ואז $\|g\|=1$ אז

$$\left|\left\langle f,g\right\rangle\right|=d\left(f,M\right)=0$$

לכן הsupהוא max . אם $f\notin M$ אזי $g_1\neq0$ לכן נגדיר

$$g:=\frac{g_1}{\|g_1\|}$$

$\|g\|=1$:

$$\begin{aligned}\alpha & \geq & \left|\left\langle f,g\right\rangle\right|=\frac{\left|\left\langle f,g\right\rangle\right|}{\|g_1\|}=\frac{\left|\left\langle \overbrace{t_1+g_1}^{f},g_1\right\rangle\right|}{g_1}=\frac{\left|\left\langle t_1,g_1\right\rangle+\left\langle g,g_1\right\rangle\right|}{\|g_1\|}\\ & = & \frac{\|g_1\|^2}{\|g_1\|}=\|g_1\|=\|f-t_1\|\geq d\left(f,M\right)\end{aligned}$$

וגם כאן הsup הוא max המתקבל עבור g שהגדרנו ובסה"כ $\alpha=d\left(f,M\right)$.

טענה:

יהיו $\mathcal{H}:=L^2\left[-1,1\right]$ עם מידת לבג m . נגדיר

$$M:=\left\{f\in\mathcal{H}\mid f\left(t\right)\overset{a.e}{=}f\left(-t\right)\right\}$$

הוכיחו כי M תת מרחב לינארי סגור של $\mathcal{H}$ וחשבו את $M^{\perp}$ ואת ההיטל P_M (כשלכל $f\in\mathcal{H}$, $f=p_Mf+h$ באשר $p_Mf\in M$, $h\in M^{\perp}$).

פתרון:

קל לבדוק שM ת"מ לינארי (ודאו). צריך להראות כי אם $f\in\mathcal{H}$ ו־$\{f_n\}_{\mathbb{N}}\subset M$ כך שב$\mathcal{H}$

$$f_n\xrightarrow{L_2}f\left(\Leftrightarrow\|f-f_n\|\to 0\right)$$

אזי $f\in M$.

הערה:

לא נובע מכך ש$f_n\left(x\right)\to f\left(x\right)$ כב"מ אבל קיימת תת סידרה $\left\{f_{n_j}\right\}$ כך ש$f_{n_j}\longrightarrow f$ כב"מ.

$$\left\{x\mid f\left(x\right)\neq f\left(-x\right)\right\}\subset\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\left\{x\mid f_{n_j}\left(x\right)\neq f_{n_h}\left(-x\right)\right\}$$

אך זו קבוצה ממידה 0. $\Leftarrow$ $m\left\{x\mid f\left(x\right)\neq f\left(-x\right)\right\}=0$ לכן $f\in M$. M תת מרחב לינארי סגור של $\mathcal{H}$ כזכור לכל $f,g\in\mathcal{H}$.

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle &= \int_{-1}^{1}f\bar{g}dm\\ N &:= \left\{f\in\mathcal{H}\mid f\left(t\right)\overset{a.e}{=}-f\left(t\right)\right\}\end{aligned}$$

אם $f\in M$, $g\in N$ אז $\langle f,g\rangle=0$ ולכן $N\subseteq M^{\perp}$. לכל $f\in\mathcal{H}$,$-1\leq t\leq 1$:

$$f\left(t\right)=\underbrace{\frac{f\left(t\right)+f\left(-t\right)}{2}}_{M}+\underbrace{\frac{f\left(t\right)-f\left(-t\right)}{2}}_{\in N\subseteq M^{\perp}}$$

מיחידות הפירוק:

$$\left(P_Mf\right)\left(t\right)=\frac{f\left(t\right)+f\left(-t\right)}{2}$$

בפרט עבור $f\in M^{\perp}$

$$f=g+h$$

g איבר של M וh איבר של $N\ni M^{\perp}$ כפירוק הניצב וזאת לכל $f\in\mathcal{H}$ ולכן עבור $g=0$ $f\in N$ נקבל $N=M^{\perp}$.

טענה:

יהי $\mathcal{H}$מרחב הילברט M ת"מ לינ' סגור של H אז $M=\left(M^{\perp}\right)^{\perp}$.

הוכחה:

$M \subset \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$ כיוון שלכל $f \in M, g \in M^{\perp}$

$$\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle} = 0 \Rightarrow f \in M^{\perp^{\perp}}$$

נוכיח כי $M^{\perp^{\perp}} \subseteq M$. M ת"מ לינארי סגור של $\mathcal{H}$ ו$\mathcal{H}$ מרחב הילברט לכן $H = M \oplus M^{\perp}$ ובפרט לכל $f \in M^{\perp^{\perp}}$.

$$f = g + h$$

באשר $g \in M, h \in M^{\perp}$ והראנו $M \subseteq M^{\perp^{\perp}}$ לכן $g \in M^{\perp^{\perp}}$.

$$M^{\perp^{\perp}} \ni f - g = h \in M^{\perp}$$

אבל $M^{\perp^{\perp}} \cap M^{\perp} = \{0\}$ לכן $f - g = 0$ כלומר $f = g \in M \Leftarrow M^{\perp^{\perp}} \subseteq M$ ובסה"כ $M^{\perp^{\perp}} = M$.

תרגיל

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה מדידה עם מידה סופית ותהי $f \in L^{1}\left(A\right)$ אי שלילית הראו ש

$$\lim_{a\to 1^{-}} \int_{A} f^{a} = \int_{A} f$$

פתרון:

תהי $(a_n)_{\mathbb{N}}$ סידרה עולה כך ש$a_n \to 1$ ולפי משפט ההתכנסות המונוטונית הנשלטת עבור $g = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{f\le 1\}} f^{a_n} = \int_{\{f\le 1\}} f$$

לפי משפט ההתכנסות הנשלטת (אפשר גם עם המונוטונית)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{f>1\}} f^{a_n} = \int_{\{f>1\}} f$$

עבור $g = f$. ובסה"כ

$$\int_{A} f^{a_n} \overset{n\to\infty}{\to} \int_{A} f$$

וזאת לכל סידרת מספרים עולה ל־1 לכן

$$\lim_{a\to 1^{-}} \int_{A} f^{a} = \int_{A} f$$