אביב תשע"ה

פיסיקה למתמטיקאים

משוואות אוילר לגראנג': תנועה על פני חרוט

1. כדור בעל מסה m מאולץ לנוע על פני חרוט (ללא חיכוך). מיקומו בכל רגע נתון בקורדינטות גליליות ע"י (r, θ, z).

(א) רשמו את הלגראנג'יאן

תהי הזוית בין היוצר של החרוט לצירו, α. אזי $r = z \tan\alpha$ ונקבל

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz = \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{z}^2\tan^2\alpha + z^2\tan^2\alpha\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz \end{aligned} \tag{1}$$

(ב) רשמו את משוואות התנועה. מהו קבוע התנועה ?

משוואות התנועה עבור z, θ בהתאמה הן

$$m\ddot{z}(\tan^2\alpha + 1) = mz\tan^2\alpha\dot{\theta}^2 - mg, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}(mz^2\tan^2\alpha\dot{\theta}) = 0, \tag{3}$$

כאשר התנע הזויתי

$$L = mz^2\tan^2\alpha\dot{\theta} \tag{4}$$

קבוע.

(ג) פתרו את משוואת התנועה עבור z כאשר ידוע כי $z(0) = z_0,\ \dot{z}(0) = -v_0$.

מחילוץ $\dot{\theta}$ מ (4) והצבה ב (2) נקבל

$$\ddot{z} = \frac{A}{z^3} - B, \tag{5}$$

כאשר $A = L^2\cos^4\alpha/m^2\sin^2\alpha,\ B = g\cos^2\alpha$. על מנת לפתור את המשוואה ההומוגנית $\ddot{z} = A/z^3$ נכפול את שני האגפים שלה ב $\dot{z}$ ונרשום $\ddot{z}\dot{z} = A\dot{z}/z^3$, או $\frac{d}{dt}(\dot{z}^2/2) = \frac{d}{dt}(-A/2z^2)$ ונקבל את המש-וואה

$$\dot{z}^2 + \frac{A}{z^2} = C. \tag{6}$$

הפתרון הכללי של (6) נתון ע"י $z_h = \sqrt{M\exp(4ct) - A/C}$, כאשר C, M קבועי אינטגרציה. הפתרון הכללי של (5) יהיה אפוא

$$z = z_h - \frac{1}{2}Bt^2 = \sqrt{M\exp(4ct) - \frac{A}{C}} - \frac{1}{2}Bt^2, \tag{7}$$

ומתנאי ההתחלה נקבל
$C = -(v_0 z_0 + 2A)/2Az_0^2,\ \ M = v_0 z_0^3/(v_0 z_0 + 2A)$.[1]

[1] אם נניח כי רדיוס הכדור r_0, אזי משוואה (7) מתארת את התנועה עבור זמנים t המקיימים $z(t) > r_0/\tan\alpha$.