

## פיסיקה למתמטיקאים

### משוואות אויילר לגראנג': תנועה על פני חרוט

1. כדור בעל מסה  $m$  מאולץ לנוע על פני חרוט (ללא חיכוך). מיקומו בכל רגע נתון בקורדינטות גליליות ע"י  $(r, \theta, z)$ .

(א) רשמו את הלגראנגיאן

תהי הזווית בין היוצר של החרוט לצירו,  $\alpha$ . אזי  $r = z \tan \alpha$  ונקבל

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz = & (1) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{z}^2 \tan^2 \alpha + z^2 \tan^2 \alpha \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz \end{aligned}$$

(ב) רשמו את משוואות התנועה. מהו קבוע התנועה ?

משוואות התנועה עבור  $z, \theta$  בהתאמה הן

$$m\ddot{z}(\tan^2 \alpha + 1) = mz \tan^2 \alpha \dot{\theta}^2 - mg, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}(mz^2 \tan^2 \alpha \dot{\theta}) = 0, \quad (3)$$

כאשר התנע הזוויתי

$$(4) \quad L = mz^2 \tan^2 \alpha \dot{\theta}$$

קבוע.

(ג) פתרו את משוואת התנועה עבור  $z$  כאשר ידוע כי  $\dot{z}(0) = -v_0$ ,  $z(0) = z_0$ .

מחילוץ  $\dot{\theta}$  מ (4) והצבה ב (2) נקבל

$$(5) \quad \ddot{z} = \frac{A}{z^3} - B,$$

כאשר  $A = L^2 \cos^4 \alpha / m^2 \sin^2 \alpha$ ,  $B = g \cos^2 \alpha$ . על מנת לפתור את המשוואה ההומוגנית  $\ddot{z} = A/z^3$  נכפול את שני האגפים שלה ב  $\dot{z}$  ונרשום  $\dot{z}\ddot{z} = A\dot{z}/z^3$ , או  $\frac{d}{dt}(\dot{z}^2/2) = \frac{d}{dt}(-A/2z^2)$  ונקבל את המש-וואה

$$(6) \quad \dot{z}^2 + \frac{A}{z^2} = C.$$

הפתרון הכללי של (6) נתון ע"י  $z_h = \sqrt{M \exp(4ct) - A/C}$  כאשר  $C, M$  קבועי אינטגרציה. הפתרון הכללי של (5) יהיה אפוא

$$(7) \quad z = z_h - \frac{1}{2}Bt^2 = \sqrt{M \exp(4ct) - \frac{A}{C}} - \frac{1}{2}Bt^2$$

ומתנאי ההתחלה נקבל

$$^1 C = -(v_0 z_0 + 2A)/2z_0^2, \quad M = v_0 z_0^3 / (v_0 z_0 + 2A)$$

---

<sup>1</sup> אם נניח כי רדיוס הכדור  $r_0$  אזי משוואה (7) מתארת את התנועה עבור זמנים  $t$  המקיימים  $z(t) > r_0 / \tan \alpha$ .