

תרגול 12 (ואחרון) – חישובי אינטגרלים

שיטת הטרפז

תרגיל:

חשב את האינטגרל הבא בעזרת שיטת הטרפז, $h = \pi, \frac{\pi}{2}$

$$I = \int_0^{\pi} e^x \cos(x) dx$$

פתרון:

עבור $h = m$

$h = \frac{b-a}{m}$ כאשר m = מספר הקטעים.

נתון $h = \frac{\pi-0}{m} = \frac{\pi}{m}$ ולכן ניתן לראות ש $m = 1$ ונשתמש בכלל טרפז פשוט.

$$I \approx \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right] h$$

נציב:

$$I \approx \left[\frac{f(0) + f(\pi)}{2} \right] \cdot \pi \approx -34.779$$

עבור $h = \frac{\pi}{2}$

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{\pi-0}{m} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow m = 2$$

בגלל ש $m = 2$ נשתמש בכלל הטרפז המוכלל.

נסמן את הנקודות שבהן יגמר טרפז אחד ויתחיל טרפז אחר ב x_i .

קל לראות ש $x_i = x_0 + i \cdot h, 0 \leq i \leq 2$

ולכן: $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \pi$

$$I \approx \frac{h}{2} \left[f(0) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(\pi) \right]$$

נציב את h :

$$I \approx \frac{\pi}{4} \left[f(0) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(\pi) \right] \approx -17.389$$

תזכורת לכלל הטרפז המוכלל (ליותר מטרפז אחד):

$$I_{\text{קירוב}} \approx \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i \cdot h) + f(b) \right]$$

נחסום גם את השגיאה:

$$E \leq \left(\frac{(b-a)^3}{12n^2} \right) \cdot |f^{(2)}(c)|$$

כאשר $c \in [a, b]$ כלשהו (נמצא חסם מקסימלי)

שיטת סימפסון

תרגיל:

חשב את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^2}{\sin(x)} dx$ בשיטת סימפסון עבור:

א. $m = 1$

ב. $m = 2$

פתרון:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin(x)} = 0$$

עבור כלל סימפסון $h = \frac{b-a}{2m}$ (מספר הפעמים שנפעיל את כלל סימפסון)

א. $m = 1$ לכן נשתמש בסימפסון פשוט.

$$h = \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}$$

בנוסף נגדיר $x_i = x_0 + i \cdot h$ (נקודות שריג) $0 \leq i \leq 2m$ (נקודות ההתחלה)

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$$

$$I \approx \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

נציב:

$$I \approx \frac{1}{6} \left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right] \approx 0.5457$$

ב. $m = 2$ ולכן נשתמש בסימפסון פשוט פעמיים.

$$h = \frac{1-0}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

נקודות החלוקה: $x_i = x_0 + i \cdot h$, $0 \leq i \leq 4$ ולכן:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$$

שימו לב שנשתמש בסימפסון פעם אחת עבור הקטע $[x_0, x_2]$ ופעם אחת עבור הקטע $[x_2, x_4]$. ולכן נקבל:

$$I \approx \frac{h}{3} \left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) \right] \approx$$
$$\approx \frac{1}{12} \left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) \right] \approx 0.54222$$

תרגיל:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	1.25
$f(x)$	0.5	0.707	0.866	1	1.118

חשבו את $\int_{\frac{1}{4}}^{1.25} f(x) dx$ בעזרת שיטת סימפסון.

פתרון:

קל לראות ש- $h = \frac{1}{4}$ ולכן:

$$h = \frac{b-a}{2m} = \frac{1.25 - 0.25}{2m} = \frac{1}{2m} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{m=2}$$

לכן נפעיל את כלל סימפסון הרגיל פעמיים. (פעם אחת על הקטע $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ ופעם אחת על הקטע $[\frac{3}{4}, 1\frac{1}{4}]$).

$$I \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] = \text{ונקבל:}$$

$$= \frac{1}{12} \left[f\left(\frac{1}{4}\right) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) + 4f(1) + f(1.25) \right] \approx 0.848107$$

תרבוע גאוס

שיטת גאוס לג'נדר עבור האינטגרל מהצורה $\int_{-1}^1 f(x) \mu(x) dx$
פונקציית משקל

$\mu(x) = 1$ במקרה של לג'נדר.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i \cdot f(x_i) + E_n$$

x_i - צמתים ← שורשים של פולינום אורתוגונלי. בפרט בלג'נדר x_i שורשים של פולינום לג'נדר מדרגה n .

w_i - משקלים.

n - מספר הנקודות שנלקחו.

נחשב את החסם לשגיאה:

$$E_n \leq \frac{(2^{2n+1}(n!)^4) \cdot f^{(2n)}(c)}{(2n+1) \cdot ((2n)!)^3}$$

כאשר $c \in [-1, 1]$

דוגמה:

נחשב את האינטגרל $I = \int_0^1 \sqrt{e^{1.5x} - 1} dx$ בשיטת לג'נדר.
נעשה הצבה כך שנעביר את הקטע $[0,1]$ לקטע $[-1,1]$ (ההצבה משנה את הגבולות).

משוואה להעברת קטע $[a, b]$ לקטע $[-1, 1]$:

$$t = \frac{2}{b-a} \cdot (x-b) + 1$$

נשתמש במשוואה לעיל:

$$t = \frac{2}{1-0} \cdot (x-1) + 1$$
$$t = 2x - 1$$

$$x = \frac{t+1}{2}$$

אזי: $dx = \frac{1}{2} dt$

ולכן: $I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{e^{1.5 \cdot \frac{(t+1)}{2}} - 1} dt$ (פונקציית המשקל = 1)

נחשב את האינטגרל $\int_{-1}^1 \sqrt{e^{1.5 \cdot \frac{(t+1)}{2}} - 1} dt$ באמצעות 3 נקודות.
נסמן $g(t) = \sqrt{e^{1.5 \cdot \frac{(t+1)}{2}} - 1}$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{e^{1.5 \cdot \frac{(t+1)}{2}} - 1} dt \approx \overbrace{w_1 g(t_1) + w_2 g(t_2) + w_3 g(t_3)}^{\text{סכימה}}$$

הצמתים t_1, t_2, t_3 הם שורשי פולינום לג'נדר מדרגה 3.

$$p_3(x) = \frac{(5x^3 - 3x)^2}{2} = 0 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{5}{3}}, t_2 = 0, t_3 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$$

כדי למצוא את w_i נעזר במשפט:

הסכימה של תרבוץ גאוס מדויקת על כל פולינום שדרגתו קטנה או שווה לדרגת הפ"א.

$$\int_{-1}^1 x^k dx = \sum_i w_i \cdot t_i^k \text{ כלומר:}$$

$n = 3$ ולכן הסכימה מדויקת עבור כל פולינום שקטן או שווה ל-3.

$$\int_{-1}^1 1 dt = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 1 = 2$$

$$\int_{-1}^1 t dt = w_1 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} + w_2 \cdot 0 - w_3 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} = 0$$

$$\int_{-1}^1 t^2 dt = w_1 \cdot \frac{5}{3} + w_2 \cdot 0 + w_3 \cdot \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$$

נפתור את מערכת המשוואות ונקבל: $w_1 = \frac{5}{9}, w_2 = \frac{8}{9}, w_3 = \frac{5}{9}$.

$$\int_{-1}^1 \sqrt{e^{1.5\left(\frac{t+1}{2}\right)} - 1} dt \approx \frac{5}{9} g\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) + \frac{8}{9} g(0) + \frac{5}{9} g\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sqrt{e^{1.5x} - 1}}{f(x)} dx &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{t+1}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 y(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{e^{1.5\left(\frac{t+1}{2}\right)} - 1} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{5}{9} f\left(\frac{\sqrt{\frac{5}{3}} + 1}{2}\right) + \frac{8}{9} f\left(\frac{0+1}{2}\right) + \frac{5}{9} f\left(\frac{-\sqrt{\frac{5}{3}} + 1}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

שיטת גאוס צ'בישב

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

כאשר $1 \leq i \leq n \mid x_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$
נגדיר גם $w_i = \frac{\pi}{n}$.

נחסום את השגיאה:

$$c \in (-1,1) \mid E_n = \frac{\pi}{(2n)! \cdot 2^{2n-1}} \cdot f^{(2n)}(c)$$

$$\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ פונקציית המשקל היא:}$$

תרגיל:

חשב את $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ עבור דרגת דיוק אלגברית 5.

$N = 2n - 1$ היא דרגת הדיוק האלגברית ו- n היא דרגת הקירוב - דרגת הפולינום.

פתרון:

$$N = 5 \Rightarrow 2n - 1 = 5 \Rightarrow 2n = 6 \Rightarrow n = 3$$

לכן נצטרך 3 נקודות.

$$\int_{-1}^1 \frac{\widetilde{e^x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{3} f(x_1) + \frac{\pi}{3} f(x_2) + \frac{\pi}{3} f(x_3)$$

י"ד אב תשע"ו
18.08.16

שיטות נומריות
תרגול 12

בס"ד
איתי סטופל

מצאנו ש $n = 3$ ולכן: $x_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $x_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{6}\right)$, $x_3 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ נציב ונקבל את מה שביקשו.