אינפי 1 תרגיל בית 7 שאלות פתוחות

1. יהי $\sum a_n, \sum b_n$ שני טורים חיוביים כך שמתקיים: לכל n, $\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
הוכיחו: אם $\sum b_n$ מתכנס, אז גם $\sum a_n$ מתכנס.
פתרון:
באינדוקציה ניתן להוכיח שלכל n, $\frac{b_n}{b_1} \leq \frac{a_n}{a_1}$.
כעת, אם $\sum b_n$ מתכנס, אז גם $\sum \frac{b_n}{b_1}$ מתכנס. (כפל בקבוע חיובי לא משפיע על התכנסות או התבדרות הטור).
ממבחן ההשוואה הראשון נקבל ש $\sum \frac{a_n}{a_1}$ מתכנס. ושוב, ע"י כפל בקבוע חיובי נקבל ש $\sum a_n$ מתכנס.

2. לאילו ערכי m, k הטור הבא מתכנס?

$$\sum \frac{\sqrt[m]{n!}}{\sqrt[k]{(2n)!}}$$

פתרון:
נפעיל את מבחן המנה:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\sqrt[m]{(n+1)!}}{\sqrt[k]{(2n+2)!}} \cdot \frac{\sqrt[k]{(2n)!}}{\sqrt[m]{(n)!}} =$$

$$\lim \frac{\sqrt[m]{n+1}}{\sqrt[k]{(2n+1)(2n+2)}} =$$

$$\lim \frac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[k]{(4n^2)}} \cdot \frac{\sqrt[m]{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt[k]{1+\frac{5}{4n}+\frac{1}{2n}}}$$

צד ימין שואף ל1, ולכן מספיק לעבוד על צד שמאל.

$$= \lim \frac{1}{\sqrt[k]{4}} \cdot n^{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2k}\right)}$$

נחלק למקרים:

א. אם $\frac{1}{m} - \frac{1}{2k} > 1$ אז הגבול הוא אינסוף, ולכן הטור מתבדר.

ב. אם $\frac{1}{m} - \frac{1}{2k} < 1$ אז הגבול הוא 0 ולכן הטור מתכנס.

ג. אם $\frac{1}{m} - \frac{1}{2k} = 1$ אז הגבול הוא $\frac{1}{\sqrt[k]{4}} < 1$ ולכן הטור מתכנס.