אלגברה מופשטת - תרגיל 4

שאלה 1

נתונה התמורה הבאה בחבורה S_9: $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\4&8&9&6&2&4&7&5&3\end{pmatrix}$.

א. רשמו את σ כמכפלת מחזורים זרים.
ב. מצאו את הסדר של σ.
ג. האם $\sigma\in A_9$? הסבירו.
ד. מהו הסדר של σ^{14}?
ה. מצאו את σ^{-1} וכתבו אותה כמכפלת מחזורים זרים.

שאלה 2

הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות. עבור הטענות הנכונות מצאו גרעין.

א. קיים אפימורפיזם מהחבורה S_{14} לחבורה מסדר 34.
ב. קיים אפימורפיזם $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_{60}$.
ג. קיים אפימורפיזם $\varphi:\mathbb{Z}_{60}\to\mathbb{Z}_{12}$.
ד. קיים איזומורפיזם $\varphi:D_6\to\Omega_{12}$.
ה. קיים מונומורפיזם $\varphi:A_4\to S_5$.
ו. קיים מונומורפיזם $\varphi:\mathbb{Z}_{24}\to S_4$.

שאלה 3

א. האם החבורה U_{14} איזומורפית לחבורה U_{18}?
ב. האם מספר <u>האפימורפיזמים</u> $\mathbb{Z}\to\Omega_4\times\Omega_5$ גדול ממספר <u>האוטומורפיזמים</u> של $\mathbb{Z}_{20}$?

שאלה 4

בסעיפים הבאים תנו דוגמה שמפריכה את <u>הטענות השגויות</u> הבאות:

א. כל חבורה מסדר 16 היא אבלית.
ב. תהינה $A,B\triangleleft G$. אם $G/A\cong B$, אז $G/B\cong A$.
ג. תהינה $A,B\triangleleft G$. $G/A\cong G/B$ אם ורק אם $A\cong B$.

<u>שאלה 5</u>

מצאו את $Z(S_3)$. האם אתם יכולים למצוא את המרכז של S_3 ללא חישוב ישיר, אלא בעזרת טענות מהתירגול, בהסתמך על כך שהחבורה S_3 אינה אבלית?

<u>שאלה 6</u>

נסתכל בתת־חבורה נורמלית של המספרים הרציונליים $(\mathbb{Z},+)\triangleleft(\mathbb{Q},+)$.

א. הוכיחו כי בחבורת המנה $G={}^{\mathbb{Q}}\!/_{\mathbb{Z}}$ הסדר של כל איבר הוא סופי.

ב. הוכיחו כי תת־החבורה של G שנוצרת על ידי המחלקות של $\frac{1}{10}$ ו- $\frac{3}{8}$ היא ציקלית.
כלומר יש להוכיח $\left\langle \frac{1}{10}+\mathbb{Z},\frac{3}{8}+\mathbb{Z}\right\rangle=\langle a+\mathbb{Z}\rangle$ עבור $a\in\mathbb{Q}$ כלשהו.

ג. מהו הסדר של תת־החבורה מהסעיף הקודם? מהו האינדקס שלה ב- G?

<u>שאלה 7</u>

א. תהי $H\le G$. הראו $H\cap Z(G)\subseteq Z(H)$ ותנו דוגמה שבה ההכלה אמיתית.

ב. תהי $N\triangleleft G$. הראו $Z(N)\triangleleft G$.

בסעיפים הבאים תנו דוגמה לחבורה G ולתת־חבורה $H\le G$ שמקיימות:

ג. הכלה ממש $Z(H)\subset Z(G)$.

ד. הכלה ממש $Z(G)\subset Z(H)$.

ה. $Z(G)$ לא מכיל את $Z(H)$ ולא מוכל בו.

בהצלחה!