תרגול 5 אינפי 1 למדמ"ח

1. מצאו את $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ עבור הפונקציות הבאות. בטאו את התשובה ע"י x אלא אם נאמר אחרת.

(א) $y = \sqrt{x+2}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

(ב) $y = e^{\cos x}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{\cos x} \cdot (-\sin x)$$

(ג) $y = \ln \ln x$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

(ד) $u = \ln x \quad y = \tan u$.
זה בעצם $y = \tan \ln x$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos^2 \ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

דרך אחרת להגיד את זה:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos^2 \ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

(ה) $x = \sqrt[3]{t+1} \quad y = \sqrt[3]{t+2}$ בטאו את הפתרון גם לפי t וגם לפי x.
נשים לב שבשביל הפתרון לפי t לא צריך להתאמץ:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

ולכן

$$\frac{1}{3}(t+2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{1}{3}(t+1)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (\frac{t+2}{t+1})^{-\frac{2}{3}} = (\frac{1}{t+1}+1)^{-\frac{2}{3}}$$

בשביל למצוא לפי x נבטא את t לפי x:

$$x^3 = t+1$$

$$x^3-1=t$$

ולכן

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(\frac{1}{x^3}+1)^{-\frac{2}{3}}$$

(ו) $y=x^x$.

הטריק הוא:

$$y=x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\cdot\ln x}$$

ולכן

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=e^{x\cdot\ln x}(\ln x+x\cdot\frac{1}{x})=x^x(\ln x+1)$$

(ז) $y=\tan(\frac{e^{\sin x}}{x^2+1})$

חישוב מראה:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos^2(\frac{e^{\sin x}}{x^2+1})}\cdot(\frac{e^{\sin x}\cos x(x^2+1)-2xe^{\sin x}}{(x^2+1)^2})$$

2. מצאו נוסחא לנגזרת של $f(x)^{g(x)}$ (בהנחה ש $f(x)>0$ אחרת ייתכן שהחזקה לא מוגדרת).

נשתמש בטריק דומה למה שעשינו קודם

$$f(x)^{g(x)}=e^{\ln f(x)^{g(x)}}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

ולכן

$$(e^{g(x)\ln f(x)})'=e^{g(x)\ln f(x)}\cdot(g'\ln f(x)+\frac{g(x)f'(x)}{f(x)})$$

3. בתחום $0\le t\le\pi$ מגדירים שתי פונקציות:

$$y(t)=e^{\sin t}\quad x(t)=e^{\cos t}$$

מצאו את $\frac{dy}{dx}$ בנקודה $x=\sqrt{e}$ (ראוי לציין ש $e^{\cos t}$ הפיכה בתחום שלנו ולכן באמת מוגדרת פונקציה של y לפי x):

פתרון: לפי כלל השרשרת

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^{\sin t}\cos t}{-e^{\cos t}\sin t}=-e^{\sin t-\cos t}\cdot\cot t$$

למצוא את t לפי x זה קשה (לפני שלומדים על פונ' טריגונומטריות הפוכות) אבל לא צריך. עבור $x=\sqrt{e}$ ערך t המתאים יהיה $t=\frac{\pi}{3}$. ולכן המספר שאנו מחפשים הוא:

$$\frac{-e^{\sqrt{\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}$$

4. גוף נע במישור לפי המשוואות

$$y=3t^3 \quad x=t^2+1$$

מצאו את שיפוע הנתיב שבו הוא נע (מבוטא לפי t)

פתרון:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{9t^2}{2t}=\frac{9}{2}t$$

5. נתון כי הפונקציה הבאה גזירה

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & x\leq 1 \\ 2x^2 & x>1 \end{cases}$$

מצאו את a,b.

השטיק הוא כמובן, שצריך שהפונקציה תהיה גזירה ב $x=1$. נזכיר כי כדי שהפונקציה $f(x)$ תהיה גזירה ב $x=1$ צריך שלכל אינפיניטיסימל Δx המספר

$$\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

יהיה מספר סופי והערך הסטנדרטי שלו צריך להיות שווה לכל Δx. נבדוק מה צריך כדי שהגדרת הנגזרת תתקיים:

$$\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-a-b}{\Delta x}$$

עכשיו נפצל למקרים לפי Δx: אם $\Delta x>0$ אז

$$\frac{f(1+\Delta x)-a-b}{\Delta x}=\frac{2+4\Delta x+2(\Delta x)^2-a-b}{\Delta x}$$

כדי שהמספר הנ"ל לא יהיה אינסופי צריך ש

$$a+b=2$$

ואז נקבל

$$\mathrm{st}(\frac{4\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x})=4$$

אם $\Delta x < 0$ אז

$$\frac{f(1+\Delta x)-a-b}{\Delta x} = \frac{a+a\Delta x+b-a-b}{\Delta x} = a$$

כדי שתהיה נגזרת, צריך שהחלק הסטנדרטי יהיה תמיד שווה ולכן בהכרח צריך להתקיים

$$a = 4$$

ומהשוויון $a+b=2$ שמצאנו קודם נסיק:

$$b = -2$$

6. עבור אילו ערכי a, b הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x \le 1 \\ 2x^2 & x > 1 \end{cases}$$

גזירה פעמיים?

תשובה: כבר ראינו שבשביל שהפונקציה תהיה גזירה היא חייבת להיות

$$f(x) = \begin{cases} 4x-2 & x \le 1 \\ 2x^2 & x > 1 \end{cases}$$

ואז הנגזרת היא:

$$f'(x) = \begin{cases} 4 & x \le 1 \\ 4x & x > 1 \end{cases}$$

נבדוק אם הפונקציה הזאת גזירה שוב. שוב הבעיה עשויה להיות ב $x=1$:

$$\frac{f'(1+\Delta x)-f'(1)}{\Delta x} = \frac{f'(1+\Delta x)-4}{\Delta x}$$

אם $\Delta x < 1$ אז

$$\frac{f'(1+\Delta x)-4}{\Delta x} = \frac{4-4}{\Delta x} = 0$$

ואם $\Delta x > 1$ אז

$$\frac{f'(1+\Delta x)-4}{\Delta x} = \frac{4+4\Delta x-4}{\Delta x} = 4$$

כלומר החלק הסטנדרטי תלוי ב Δx ולכן f' לא גזירה, כלומר f' לא גזירה פעמיים, לא משנה מהם a, b.

7. נניח כי $f(x)$ היא פונקציה הפיכה. האם גם $f'(x)$ הפיכה? נניח כי $f(x)$ אינה הפיכה, האם גם $f'(x)$ אינה הפיכה?

תשובה: אין קשר בין הפיכות של פונקציה לזאת של הנגזרת. $f(x)=x$ הפיכה בעוד שנגזרתה $f'(x)=1$ אינה הפיכה. כמו כן $f(x)=x^2$ אינה הפיכה בעוד שנגזרתה הפיכה.

8. הראו כי הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

גזירה בכל נקודה. חשבו את הנגזרת שלה. שימו לב כי הנגזרת שלה אינה פונקציה חסומה בסביבת 0 (אם לא הגדרנו עדיין פונקציה חסומה, אפשר להסביר את זה בציור) למרות שהפונקציה המקורית כן חסומה בסביבת 0.

תשובה: נפריד לשני מקרים:

(א) אם $x\neq 0$ אז אפשר לגזור לפי כללי גזירה רגילים ולקבל:

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x^2}+x^2\cos\frac{1}{x^2}\cdot(-2\frac{1}{x^3})=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

(ב) אם $x=0$ אז נגזור לפי הגדרה:

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=\Delta x\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}$$

ולכן

$$f'(0)=0$$

כלומר

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

9. תהי $f(x)$ פונקציה הגזירה ב x_0 הוכיחו כי $\mathrm{st}(f(x_0+\Delta x))=f(x_0)$.

הוכחה: ידוע כי

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

הוא מספר סופי, זה מחייב אותנו ש $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ יהיה אינפיניטיסימל, כלומר

$$\mathrm{st}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0$$

ולכן

$$\mathrm{st}(f(x_0+\Delta x))=\mathrm{st}(f(x_0))=f(x_0)$$

10. ראינו כבר שאם $f(x)$ גזירה ב x_0 ו $g(x)$ גזירה ב x_0 אז סכומם ומכפלתם גם כן גזירים:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(א) נניח ש f גזירה ב x_0 וg לא גזירה ב x_0 האם הסכום או המכפלה שלהם יכולים להיות גזירים? את הסכום נשאיר כתרגיל בית. נטפל במכפלה:
אם f היא פונקציה גזירה ו g אינה גזירה אז מכפלתם יכולה להיות פונקציה גזירה למשל:

$$f(x) = 0 \quad g(x) = |x|$$

אבל אם $f(x_0) \neq 0$ ו g אינה גזירה ב x_0 אז מכפלתם בהכרח אינה גזירה.
הוכחה: נניח בשלילה ש fg דווקא גזירה ב x_0

$$\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} =$$
$$\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0+\Delta x)g(x_0) + f(x_0+\Delta x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} =$$
$$f(x_0+\Delta x)\frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} + g(x_0)\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ולכן

$$= \mathrm{st}(f(x_0+\Delta x)\frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} + g(x_0)\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x})$$

ראשית נשים לב שהביטוי $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$הוא מספר סופי (כי f גזירה ב x_0) וכן $g(x_0)$ סופי וגם $f(x_0+\Delta x)$ מספר סופי (לפי התרגיל הקודם למשל) ולכן גם

$$\frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}$$

חייב להיות מספר סופי (אחרת לא יהיה חלק סטנדרטי לביטוי בניגוד למה שגילינו הרגע). עכשיו שהשתכנענו שכל המרכיבים סופיים אפשר להשתמש בנוסחאות של חלק סטנדרטי:

$$(fg)'(x_0) = \mathrm{st}(f(x_0+\Delta x)\frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} + g(x_0)\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x})$$
$$= f(x_0)\,\mathrm{st}(\frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}) + g(x_0)f'(x_0)$$

ולכן נקבל

$$\mathrm{st}(\frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}) = \frac{(fg)'(x_0) - g(x_0)f'(x_0)}{f(x_0)}$$

(פה משתמשים בנתון ש $f(x_0) \neq 0$) ולכן g גזירה ב x_0 בסתירה.

(ב) נניח ש f אינה גזירה ב x_0 וg לא גזירה ב x_0 האם הסכום או המכפלה שלהם יכולים להיות גזירים? את הסכום נשאיר כתרגיל בית. נטפל במכפלה:
במקרה הזה המכפלה יכולה להיות גזירה ויכול להיות שלא. למשל:

i. אם $f(x) = g(x) = |x|$ אז $fg = x^2$ שזה גזיר.

ii. אם $f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{N} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N} \end{cases}$ תוכיחו בתרגיל הבית שזו לא פונקציה גזירה אבל

$$fg(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{N} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N} \end{cases}$$

אותה פונקציה שאינה גזירה.