

תרגול 5 אינפי 1 למדמ"ח

1. מצאו את $\frac{dy}{dx}$ עבור הפונקציות הבאות. בטאו את התשובה ע"י x אלא אם נאמר אחרת.

$$y = \sqrt{x+2} \quad (\text{א})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

$$y = e^{\cos x} \quad (\text{ב})$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\cos x} \cdot (-\sin x)$$

$$y = \ln \ln x \quad (\text{ג})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$y = \tan u \quad u = \ln x \quad (\text{ד})$$

זה בעצם $y = \tan \ln x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 \ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

דרך אחרת להגיד את זה:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos^2 \ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

(ה) $y = \sqrt[3]{t+2}$ $x = \sqrt[3]{t+1}$ בטאו את הפתרון גם לפי t וגם לפי x . נשים לב שבשביל הפתרון לפי t לא צריך להתאמץ:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

ולכן

$$\frac{1}{3}(t+2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{dy}{dx} \frac{1}{3}(t+1)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{t+2}{t+1}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{t+1} + 1\right)^{-\frac{2}{3}}$$

בשביל למצוא לפי x נבטא את t לפי x :

$$x^3 = t + 1$$

$$x^3 - 1 = t$$

ולכן

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x^3} + 1\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$.y = x^x \quad (ו)$$

הטריק הוא:

$$y = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \cdot \ln x}$$

ולכן

$$\frac{dy}{dx} = e^{x \cdot \ln x} \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x (\ln x + 1)$$

$$y = \tan\left(\frac{e^{\sin x}}{x^2 + 1}\right) \quad (ז)$$

חישוב מראה:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{e^{\sin x}}{x^2 + 1}\right)} \cdot \left(\frac{e^{\sin x} \cos x (x^2 + 1) - 2x e^{\sin x}}{(x^2 + 1)^2}\right)$$

2. מצאו נוסחא לנגזרת של $f(x)^{g(x)}$ (בהנחה ש $f(x) > 0$ אחרת ייתכן שהחזקה לא מוגדרת).

נשתמש בטריק דומה למה שעשינו קודם

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

ולכן

$$(e^{g(x) \ln f(x)})' = e^{g(x) \ln f(x)} \cdot (g' \ln f(x) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)})$$

3. בתחום $0 \leq t \leq \pi$ מגדירים שתי פונקציות:

$$y(t) = e^{\sin t} \quad x(t) = e^{\cos t}$$

מצאו את $\frac{dy}{dx}$ בנקודה $x = \sqrt{e}$ (ראוי לציין ש $e^{\cos t}$ הפיכה בתחום שלנו ולכן באמת מוגדרת פונקציה של y לפי x):

פתרון: לפי כלל השרשרת

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{\sin t} \cos t}{-e^{\cos t} \sin t} = -e^{\sin t - \cos t} \cdot \cot t$$

למצוא את t לפי x זה קשה (לפני שלומדים על פונ' טריגונומטריות הפוכות) אבל לא צריך. עבור $x = \sqrt{e}$ ערך t המתאים יהיה $t = \frac{\pi}{3}$. ולכן המספר שאנו מחפשים הוא:

$$\frac{-e^{\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}$$

4. גוף נע במישור לפי המשוואות

$$y = 3t^3 \quad x = t^2 + 1$$

מצאו את שיפוע הנתיב שבו הוא נע (מבוטא לפי t) פתרון:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{9t^2}{2t} = \frac{9}{2}t$$

5. נתון כי הפונקציה הבאה גזירה

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 1 \\ 2x^2 & x > 1 \end{cases}$$

מצאו את a, b .

השטיק הוא כמובן, שצריך שהפונקציה תהיה גזירה ב $x = 1$. נזכיר כי כדי שהפונקציה $f(x)$ תהיה גזירה ב $x = 1$ צריך שלכל אינפיניטיסימל Δx המספר

$$\frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

יהיה מספר סופי והערך הסטנדרטי שלו צריך להיות שווה לכל Δx . נבדוק מה צריך כדי שהגדרת הנגזרת תתקיים:

$$\frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{f(1 + \Delta x) - a - b}{\Delta x}$$

עכשיו נפצל למקרים לפי Δx : אם $\Delta x > 0$ אז

$$\frac{f(1 + \Delta x) - a - b}{\Delta x} = \frac{2 + 4\Delta x + 2(\Delta x)^2 - a - b}{\Delta x}$$

כדי שהמספר הנ"ל לא יהיה אינסופי צריך ש

$$a + b = 2$$

ואז נקבל

$$\text{st}\left(\frac{4\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x}\right) = 4$$

אם $\Delta x < 0$ אז

$$\frac{f(1 + \Delta x) - a - b}{\Delta x} = \frac{a + a\Delta x + b - a - b}{\Delta x} = a$$

כדי שתהיה נגזרת, צריך שהחלק הסטנדרטי יהיה תמיד שווה ולכן בהכרח צריך להתקיים

$$a = 4$$

ומהשוויון $a + b = 2$ שמצאנו קודם נסיק:

$$b = -2$$

6. עבור אילו ערכי a, b הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 1 \\ 2x^2 & x > 1 \end{cases}$$

גזירה פעמיים?

תשובה: כבר ראינו שבשביל שהפונקציה תהיה גזירה היא חייבת להיות

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & x \leq 1 \\ 2x^2 & x > 1 \end{cases}$$

ואז הנגזרת היא:

$$f'(x) = \begin{cases} 4 & x \leq 1 \\ 4x & x > 1 \end{cases}$$

נבדוק אם הפונקציה הזאת גזירה שוב. שוב הבעיה עשויה להיות ב $x = 1$:

$$\frac{f'(1 + \Delta x) - f'(1)}{\Delta x} = \frac{f'(1 + \Delta x) - 4}{\Delta x}$$

אם $\Delta x < 0$ אז

$$\frac{f'(1 + \Delta x) - 4}{\Delta x} = \frac{4 - 4}{\Delta x} = 0$$

ואם $\Delta x > 0$ אז

$$\frac{f'(1 + \Delta x) - 4}{\Delta x} = \frac{4 + 4\Delta x - 4}{\Delta x} = 4$$

כלומר החלק הסטנדרטי תלוי ב Δx ולכן f' לא גזירה, כלומר f' לא גזירה פעמיים, לא משנה מהם a, b .

7. נניח כי $f(x)$ היא פונקציה הפיכה. האם גם $f'(x)$ הפיכה? נניח כי $f(x)$ אינה הפיכה, האם גם $f'(x)$ אינה הפיכה?

תשובה: אין קשר בין הפיכות של פונקציה לזאת של הנגזרת. $f(x) = x$ הפיכה בעוד שנגזרתה $f'(x) = 1$ אינה הפיכה. כמו כן $f(x) = x^2$ אינה הפיכה בעוד שנגזרתה הפיכה.

8. הראו כי הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

גזירה בכל נקודה. חשבו את הנגזרת שלה. שימו לב כי הנגזרת שלה אינה פונקציה חסומה בסביבת 0 (אם לא הגדרנו עדיין פונקציה חסומה, אפשר להסביר את זה בצירוף) למרות שהפונקציה המקורית כן חסומה בסביבת 0.

תשובה: נפריד לשני מקרים:

(א) אם $x \neq 0$ אז אפשר לגזור לפי כללי גזירה רגילים ולקבל:

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} + x^2 \cos \frac{1}{x^2} \cdot \left(-2 \frac{1}{x^3}\right) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$$

(ב) אם $x = 0$ אז נגזור לפי הגדרה:

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \Delta x \sin \frac{1}{(\Delta x)^2}$$

ולכן

$$f'(0) = 0$$

כלומר

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

9. תהי $f(x)$ פונקציה הגזירה ב x_0 הוכיחו כי $\text{st}(f(x_0 + \Delta x)) = f(x_0)$.

הוכחה: ידוע כי

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

הוא מספר סופי, זה מחייב אותנו ש $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ יהיה אינפיניטיסימל, כלומר

$$\text{st}(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$$

ולכן

$$\text{st}(f(x_0 + \Delta x)) = \text{st}(f(x_0)) = f(x_0)$$

10. ראינו כבר שאם $f(x)$ גזירה ב x_0 ו $g(x)$ גזירה ב x_0 אז סכומם ומכפלתם גם כן גזירים:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(א) נניח ש f גזירה ב x_0 ו g לא גזירה ב x_0 האם הסכום או המכפלה שלהם יכולים להיות גזירים? את הסכום נשאיר כתרגיל בית. נטפל במכפלה:
 אם f היא פונקציה גזירה ו g אינה גזירה אז מכפלתם יכולה להיות פונקציה גזירה למשל:

$$f(x) = 0 \quad g(x) = |x|$$

אבל אם $f(x_0) \neq 0$ ו g אינה גזירה ב x_0 אז מכפלתם בהכרח אינה גזירה. הוכחה: נניח בשלילה ש fg דווקא גזירה ב x_0

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \\ & \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0 + \Delta x)g(x_0) + f(x_0 + \Delta x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \\ & f(x_0 + \Delta x) \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} + g(x_0) \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

ולכן

$$= \text{st} \left(f(x_0 + \Delta x) \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} + g(x_0) \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

ראשית נשים לב שהביטוי $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ הוא מספר סופי (כי f גזירה ב x_0) וכן $g(x_0)$ סופי וגם $f(x_0 + \Delta x)$ מספר סופי (לפי התרגיל הקודם למשל) ולכן גם

$$\frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}$$

חייב להיות מספר סופי (אחרת לא יהיה חלק סטנדרטי לביטוי בניגוד למה שגילינו הרגע). עכשיו שהשתכנענו שכל המרכיבים סופיים אפשר להשתמש בנוסחאות של חלק סטנדרטי:

$$\begin{aligned} (fg)'(x_0) &= \text{st} \left(f(x_0 + \Delta x) \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} + g(x_0) \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right) \\ &= f(x_0) \text{st} \left(\frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right) + g(x_0) f'(x_0) \end{aligned}$$

ולכן נקבל

$$\text{st} \left(\frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right) = \frac{(fg)'(x_0) - g(x_0)f'(x_0)}{f(x_0)}$$

(פה משתמשים בנתון ש $f(x_0) \neq 0$) ולכן g גזירה ב x_0 בסתירה.

(ב) נניח ש f אינה גזירה ב x_0 ו g לא גזירה ב x_0 האם הסכום או המכפלה שלהם יכולים להיות גזירים? את הסכום נשאיר כתרגיל בית. נטפל במכפלה:
 במקרה הזה המכפלה יכולה להיות גזירה ויכול להיות שלא. למשל:

i. אם $f(x) = g(x) = |x|$ אז $fg = x^2$ שזה גזיר.

ii. אם $f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{N} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$ תוכיחו בתרגיל הבית שזו לא פונקציה גזירה אבל

$$fg(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{N} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

אותה פונקציה שאינה גזירה.