

בחינת סיום (מועד ב') בקורס
מבנים דיסקרטיים להנדסה (83217)
 מרצה: ד"ר נתן קלר

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

נא לענות על 4 מתוך 5 השאלות. בכל שאלה, סעיף א' שווה 5 נקודות וסעיפים ב' וג' שווים 10 נקודות כל אחד.
 אין להשתמש בחומר עזר.

בהצלחה!

שאלה 1

- א. הגדר: חבורה אבלית (קומוטיבית).
 ב. הוכח כי אם בחבורה G , לכל שני איברים a, b מתקיים $(ab)^2 = a^2b^2$, אז G אבלית.
 ג. תהי G חבורה (לאו דווקא אבלית). נניח כי קיימים שני איברים שונים $g, h \in G$ שהינם מסדר 2 ב- G . הוכח כי קיים לפחות איבר אחד נוסף שהוא מסדר 2 ב- G .

שאלה 2

- א. נסח את משפט ההומומורפיזם לחבורות.
 ב. תהיינה G, H חבורות ויהי $f: G \rightarrow H$ הומומורפיזם. הוכח כי הגרעין $\text{Ker}(f) = \{g \in G \mid f(g) = e_H\}$ הוא תת חבורה נורמלית של G .
 ג. תן דוגמה לחבורה G ותת חבורה שלה H שאינה תת חבורה נורמלית.

שאלה 3

- א. הגדר: חוג עם חילוק.
 ב. נניח כי בחוג R , לכל איבר $x \in R$ מתקיים $x^2 = x$. הוכח כי לכל $x \in R$ מתקיים $x + x = 0$ (כאשר 0 היחידה החיבורית של R).
 ג. יהי R חוג ויהיו $a, b \in R$. הוכח כי אם $1 - ab$ הפיך, אז גם $1 - ba$ הפיך (כאשר 1 היחידה הכפלית של החוג).

שאלה 4

- א. הגדר: מחלק משותף גדול ביותר (gcd) של שני פולינומים.
 ב. מצא את המחלק המשותף הגדול ביותר של הפולינומים $f(x) = x^6 + x^3 + x + 1$ ו- $g(x) = x^2 + 1$ מעל שדה המספרים הרציונליים Q , והצג אותו כצירוף שלהם.
 ג. יהיו $a, b \in Z$. נסמן $d = \text{gcd}(a, b)$. הוכח כי מתקיים:
 $aZ + bZ = \{am + bn \mid m, n \in Z\} = dZ$

שאלה 5

- א. הגדר: אוטומט סופי לא דטרמיניסטי (אסל"ד) עם מעברי אפסילון.
 ב. הוכח כי לא קיים אסל"ד עם מעברי אפסילון שמקבל את השפה $L = \{a^m \mid m = n^2, n \in N\}$.
 ג. נתונים אס"דים דטרמיניסטיים A, B מעל האלפבית Σ שמקבלים את השפות L_1, L_2 בהתאמה. בנה אס"ד מעל Σ שמקבל את השפה $L_1 \cap L_2$.