אלגברה לינארית 2| תשפ"א מועד א'

פתרון המבחן | יונתן סמידוברסקי

שאלה 1

(סעיף א)

$A \in \mathbb{C}^{5*5}$ כך שכל רכיביה ממשיים, וכן $A^4 = -A^2$, $rank(A) = 3$.

כעת נובע $dim(N(A)) = 5 - 3 = 2$, ניתן לכתוב גם כך $din(N(A - 0I)) = 2$ כלומר 0 הוא ערך עצמי של A

בעל ריבוי גיאומטרי 2, כעת מהנתון השני $A^4 - A^2 = 0$ כלומר, $A^2(A^2 + I) = A^2 * (A - iI) * (A + iI) = 0$

בעצם קיבלנו שישנו פולינום מאפס למטריצה A כך $p(x) = x^2 * (x - i) * (x + i)$ וממשפט הוא מחלק את הפולינום האופייני, והפולינום המינימלי מחלק אותו.

קיבלנו כי לא יכולים להיות ערכים עצמיים נוספים ובעצם המעריך של אחד הגורמים בפולינום צריך להיות גבוה יותר. אבל ידוע ש$trace$ הינו סכום הע"ע.

כלומר $tr(A) = 0 + i - i + a$ כאשר $a \in \{0, i, -1\}$ אבל רכיבי המטריצה ממשיים ולכן $a = 0$ (אחרת ייצא מרוכב על האלכסון).

סה"כ הפולינום האופייני הוא $p_A(x) = x^3 * (x - i) * (x + i)$

והפולינום המינימלי $m_A(x)$ מחלק את $p(x) = x^2 * (x - i) * (x + i)$ ולכן נחלק למקרים

<u>מקרה א':</u> $m_A(x) = x^2 * (x - i) * (x + i)$

<u>מקרה ב':</u> $m_A(x) = x * (x - i) * (x + i)$

נכתוב את צורות הז'ורדן במקרים אלה (אם אפשר):

<u>מקרה א'</u>

ע"ע/תכונה	ריבוי אלגברי	ריבוי גיאומטרי	חזקה בפולינום המינימלי
0	3	2	2
i	1	?	1
$-i$	1	?	1

סך הכל

$$J(A) = J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(i) \oplus J_1(-i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

אבל במקרה ב', מקבלים שהחזקה בפ"מ היא 1 ,הריבוי האלגברי הוא 3, הריבוי הגיאומטרי הוא 2.

כלומר, 2 בלוקים, שהגדול מביניהם הוא בגודל 1, והע"ע 0 מופיע 3 פעמים וזו סתירה. ולכן הצורה שכתבנו היא צורת ז'ורדן היחידה!

(סעיף ב)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

ממשפט מהרצאה, מטריצה B לכסינה $\Longleftrightarrow$ הריבוי האלגברי והגיאומטרי שלה זהים לכל ערך עצמי. בעזרת שימוש בפיתוח לפי לפלס (פעם לפי שורה ופעם לפי עמודה), נקבל שהפולינום האופייני הינו

$$p_A(x) = det(\begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-6 \end{pmatrix}) =$$

$$= (x-1)^2 * (x-2)^2 * (x-3)^2 * (x-4)^2 (x-5)^2 (x-6)^2$$

כעת, קל לוודא שלכל $\{1,2,3,4,5,6\} = \lambda \in \sigma(A)$ מתקיים $dim(N(A-\lambda I)) = 2$, ולכן הריבוי האלגברי והגיאומטרי שווים לכל ע"ע $\Leftarrow B$ לכסינה.

(ישנן דרכים נוספות עם הפולינום המינימלי או חלוקה לבלוקים שלא הצגתי).

שאלה 2

(סעיף א)

יהי $V = \mathbb{R}^{2*2}$ ממ"פ עם המכפלה הפנימית $< A, B >= tr(A^t B)$

תהי $T : V \to V$ המוגדרת ע"י: $T(A) = A^t$, נוכיח T צמודה לעצמה, כלומר $T^* = T$.

תהי T^* ההעתקה הצמודה, כעת מתקיים מההגדרה

$$< T(A), B >=< A, T^*(B) >$$

$$tr(T(A)^t * B) = tr(A^t T^*(B))$$

$$tr(A^{t^t} * B) = tr(A^t * T^*(B))$$

$$tr(A * B) = tr(A^t * T^*(B))$$

אבל

$$tr(A * B) = tr((AB)^t) = tr(B^t * A)$$

נציב לקבלת

$$tr(B^t * A^t) = tr(A^t * T^*(B))$$

[טענה מלינארית 1: $tr(BA) = tr(AB)$]
וסיימנו.
כעת מקבלים

$$tr(B^t A^t) = tr(A^t * B^t)$$

ולכן

$$tr(A^t * B^t) = tr(A^t * T^*(B))$$

$$< A, B^t >=< A, T^*(B) >$$

$$< A, T(B) > - < A, T^*(B) >= 0$$

$$< A, (T - T^*)(B) >= 0$$

אבל זה מתקיים לכל A, B ובפרט ל$A = (T - T^*)(B)$. כלומר,

$$< (T - T^*)(B), (T - T^*)(B) >= 0$$

ומאי שליליות

$$(T - T^*)(B) = 0$$

לכל $B \in \mathbb{R}^{2*2}$ ולכן

$$T = T^*$$

(סעיף ב)

יהי

$$\{A_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}\}$$

ראשית, ניקח את הבסיס הסטנדרטי

$$E = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

כעת

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נלכסן את המטריצה, ראשית קל לחשב שהבסיסים למרחבים העצמיים הם:

עבור V_1: $\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$, ניתן להסתכל על הבסיס גם כ$\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}\}$

עבור V_{-1}: $\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$

ואז מפעילים גראם-שמידט על הבסיס

$$\{\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$$

והאיברים הראשונים A_1, A_2לא ישתנו מכיוון שהם גם ככה מאונכים, וקל לחשב שגם הרביעי מאונך לשלושתם.

$$A_1' = A_1$$

$$A_2' = A_2$$

$$A_3' = A_3 - \frac{< A_3, A_2 >}{||A_2||^2} * A_2 - \frac{< A_3, A_1 >}{||A_1||^2} * A_1 = 0.25 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4' = A_4$$

כעת הבסיס

$$\{\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$$

מחישוב מקבלים שההעתקה לפי בסיס זה הינה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(סעיף ג)

צריך להוכיח כי T אוניטרית, ניעזר בסעיפים ב' וג' במשפט מההרצאה האומר כי T אוניטרית אם ורק אם $[T]_B$ אוניטרית עם הבסיס האורתונורמלי שמצאנו.
צ"ל:

$$TT^* = T^*T = Id$$

אבל מסעיף א' נובע ש

$$TT^* = T^*T$$

ומסעיף ב'

$$[T]_B * [T^*]_B = [T]_B * [T]_B^* = [T]_B * \overline{[T]_B^t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = I$$

וסיימנו.

שאלה 3

(סעיף א)

יהי V ממ"פ וW_1, W_2 ת"מ שלו כך ש$V = W_1 \oplus W_2$
צ"ל: $V = W_1^\perp \oplus W_2^\perp$

באמצעות הכלה ושיוויון מימדים. ההכלה ברורה (בתוך מרחב מכפלה פנימית) ונותר שיוויון מימדים,
כעת נסיים עם שיוויון מימדים. ניעזר במשפט המימדים

$$dim(W_1^\perp \oplus W_2^\perp) = dim(W_1^\perp) + dim(W_2^\perp) + dim(W_1^\perp \cap W_2^\perp) =$$

נשים לב כי $dim(W_1^\perp \cap W_2^\perp) = 0$ מטענת עזר

$$(dim(V) - dim(W_1)) + (dim(V) - dim(W_2)) = 2dim(V) - (dim(W_1) - dim(W_2)) = dim(V)$$

(טענת עזר)

טענת עזר $W_1^\perp \cap W_2^\perp = \{0\}$

הוכחה (ההכלה בכיוון אחד ברורה), נוכיח את הכיוון השני.

יהי $v \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$

וכן יהיו $v_1 \in W_1$, $v_2 \in W_2$

ומההגדרה מתקיים

$$< v_1, v >=< v_2, v >= 0$$

כעת, לכל $v' \in V$, (משום ש$V = W_1 \oplus W_2$) מתקיים:

$$< v, v' >= 0$$

וניקח בפרט $v' = v$ ונקבל

$$< v, v >= 0$$

ומאי שליליות $v = 0$.