

אלגברה לינארית 2 | תשפ"א מועד א'

פתרון המבחן | יונתן סמידוברסקי

שאלה 1

(סעיף א)

$A \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ כך שכל רכיביה ממשיים, וכן $A^4 = -A^2$, $\text{rank}(A) = 3$.
 כעת נובע $\dim(N(A)) = 5 - 3 = 2$, ניתן לכתוב גם כך $\dim(N(A - 0I)) = 2$ כלומר 0 הוא ערך עצמי של A
 בעל ריבוי גיאומטרי 2, כעת מהנתון השני $A^4 - A^2 = 0$ כלומר, $A^2(A^2 + I) = A^2 * (A - iI) * (A + iI) = 0$
 בעצם קיבלנו שישנו פולינום מאפס למטריצה A כך $p(x) = x^2 * (x - i) * (x + i)$ וממשפט הפולינום המינימלי מחלק אותו.
 קיבלנו כי לא יכולים להיות ערכים עצמיים נוספים ובעצם המעריך של אחד הגורמים בפולינום צריך להיות גבוה יותר. אבל ידוע ש trace הינו סכום הע"ע.

כלומר $\text{tr}(A) = 0 + i - i + a$ כאשר $a \in \{0, i, -1\}$ אבל רכיבי המטריצה ממשיים ולכן $a = 0$ (אחרת ייצא מרוכב על האלכסון).

סה"כ הפולינום האופייני הוא $p_A(x) = x^3 * (x - i) * (x + i)$

הפולינום המינימלי $m_A(x)$ מחלק את $p(x) = x^2 * (x - i) * (x + i)$ ולכן נחלק למקרים

מקרה א': $m_A(x) = x^2 * (x - i) * (x + i)$

מקרה ב': $m_A(x) = x * (x - i) * (x + i)$

נכתוב את צורות הז'ורדן במקרים אלה (אם אפשר):

מקרה א'

ע"ע/תכונה	ריבוי אלגברי	ריבוי גיאומטרי	חזקה בפולינום המינימלי
0	3	2	2
i	1	?	1
-i	1	?	1

סך הכל

$$J(A) = J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(i) \oplus J_1(-i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

אבל במקרה ב', מקבלים שהחזקה בפ"מ היא 1, הריבוי האלגברי הוא 3, הריבוי הגיאומטרי הוא 2.
 כלומר, 2 בלוקים, שהגודל מביניהם הוא בגודל 1, והע"ע 0 מופיע 3 פעמים וזו סתירה. ולכן הצורה שכתבנו היא צורת ז'ורדן היחידה!

(סעיף ב)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

ממשפט מהרצאה, מטריצה B לכסינה \iff הריבוי האלגברי והגיאומטרי שלה זהים לכל ערך עצמי. בעזרת שימוש בפיתוח לפי לפלס (פעם לפי שורה ופעם לפי עמודה), נקבל שהפולינום האופייני הינו

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-6 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (x-1)^2 * (x-2)^2 * (x-3)^2 * (x-4)^2 (x-5)^2 (x-6)^2$$

כעת, קל לוודא שלכל $\lambda \in \sigma(A) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ מתקיים $\dim(N(A - \lambda I)) = 2$, ולכן הריבוי האלגברי והגיאומטרי שווים לכל ע"ע $B \iff$ לכסינה.
(ישנן דרכים נוספות עם הפולינום המינימלי או חלוקה לבלוקים שלא הצגתי).

שאלה 2

(סעיף א)

יהי $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ממ"פ עם המכפלה הפנימית $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B)$ תהי $T: V \rightarrow V$ המוגדרת ע"י: $T(A) = A^t$, נוכיח T צמודה לעצמה, כלומר $T^* = T$.

תהי T^* ההעתקה הצמודה, כעת מתקיים מההגדרה

$$\langle T(A), B \rangle = \langle A, T^*(B) \rangle$$

$$\text{tr}(T(A)^t * B) = \text{tr}(A^t T^*(B))$$

$$\text{tr}(A^{tt} * B) = \text{tr}(A^t * T^*(B))$$

$$\text{tr}(A * B) = \text{tr}(A^t * T^*(B))$$

אבל

$$\text{tr}(A * B) = \text{tr}((AB)^t) = \text{tr}(B^t * A)$$

נציב לקבלת

$$\text{tr}(B^t * A^t) = \text{tr}(A^t * T^*(B))$$

[טענה מלינאריות 1: $\text{tr}(BA) = \text{tr}(AB)$]

וסיימנו.

כעת מקבלים

$$\text{tr}(B^t A^t) = \text{tr}(A^t * B^t)$$

ולכן

$$\text{tr}(A^t * B^t) = \text{tr}(A^t * T^*(B))$$

$$\langle A, B^t \rangle = \langle A, T^*(B) \rangle$$

$$\langle A, T(B) \rangle - \langle A, T^*(B) \rangle = 0$$

$$\langle A, (T - T^*)(B) \rangle = 0$$

אבל זה מתקיים לכל A, B ובפרט ל $A = (T - T^*)(B)$. כלומר,

$$\langle (T - T^*)(B), (T - T^*)(B) \rangle = 0$$

ומאי שליליות

$$(T - T^*)(B) = 0$$

לכל $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ולכן

$$T = T^*$$

(סעיף ב)

יהי

$$\{A_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}\}$$

ראשית, ניקח את הבסיס הסטנדרטי

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

לעת

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נלכסן את המטריצה, ראשית קל לחשב שהבסיסים למרחבים העצמיים הם:
 עבור V_1 : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, ניתן להסתכל על הבסיס גם כ- $\left\{ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
 עבור V_{-1} : $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
 ואז מפעילים גראם-שמידט על הבסיס

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

והאיברים הראשונים A_1, A_2 לא ישתנו מכיוון שהם גם ככה מאונכים, וקל לחשב שגם הרביעי מאונך לשלושתם.

$$A'_1 = A_1$$

$$A'_2 = A_2$$

$$A'_3 = A_3 - \frac{\langle A_3, A_2 \rangle}{\|A_2\|^2} * A_2 - \frac{\langle A_3, A_1 \rangle}{\|A_1\|^2} * A_1 = 0.25 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A'_4 = A_4$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

מחישוב מקבלים שההעתקה לפי בסיס זה הינה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(סעיף ג)

צריך להוכיח כי T אוניטרית, ניעזר בסעיפים ב' וג' במשפט מההרצאה האומר כי T אוניטרית אם ורק אם $[T]_B$ אוניטרית עם הבסיס האורתונורמלי שמצאנו. צ"ל:

$$TT^* = T^*T = Id$$

אבל מסעיף א' נובע ש

$$TT^* = T^*T$$

ומסעיף ב'

$$[T]_B^* [T^*]_B = [T]_B^* [T]_B^* = [T]_B^* \overline{[T]_B^t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = I$$

רסימנו.

שאלה 3

(סעיף א)

יהי V ממ"פ ו W_1, W_2 ת"מ שלו כך ש $V = W_1 \oplus W_2$
צ"ל: $V = W_1^\perp \oplus W_2^\perp$

באמצעות הכלה ושיוויון מימדים. ההכלה ברורה (בתוך מרחב מכפלה פנימית) ונותר שיוויון מימדים, כעת נסיים עם שיוויון מימדים. ניעזר במשפט המימדים

$$\dim(W_1^\perp \oplus W_2^\perp) = \dim(W_1^\perp) + \dim(W_2^\perp) + \dim(W_1^\perp \cap W_2^\perp) =$$

נשים לב כי $\dim(W_1^\perp \cap W_2^\perp) = 0$ מטענת עזר

$$(\dim(V) - \dim(W_1)) + (\dim(V) - \dim(W_2)) = 2\dim(V) - (\dim(W_1) + \dim(W_2)) = \dim(V)$$

(טענת עזר)

$$W_1^\perp \cap W_2^\perp = \{0\} \text{ טענת עזר}$$

הוכחה (ההכלה בכיוון אחד ברורה), נוכיח את הכיוון השני.

יהי $v \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$

וכן יהיו $v_1 \in W_1, v_2 \in W_2$

ומההגדרה מתקיים

$$\langle v_1, v \rangle = \langle v_2, v \rangle = 0$$

כעת, לכל $v' \in V$ (משום ש $V = W_1 \oplus W_2$) מתקיים:

$$\langle v, v' \rangle = 0$$

וניקח בפרט $v' = v$ ונקבל

$$\langle v, v \rangle = 0$$

ומאי שליליות $v = 0$.