גיאומטריה אנליטית

ענף זה עוסק בחקר הגיאומטריה באמצעות כלים אלגבריים ובשימוש **במערכת צירים**.

תרגיל

מצאו את הנקודה P על הפרבולה $y = x^2$ הקרובה ביותר אל הנקודה $(3,0)$.

פתרון

נפתור בשתי דרכים:

דרך א': נקודה כללית על הפרבולה היא מהצורה $Q = \left(\underbrace{t}_{x}, \underbrace{t^2}_{y}\right)$. עבור $t \in \mathbb{R}$

המרחק בין Q לבין $(3,0)$ הוא

$$d\left(Q,(3,0)\right) = \sqrt{(t-3)^2 + (t^2)^2} \geq 0$$

ורוצים למזהר את זה. נעבוד עם המרחק בריבוע:

$$f\left(t\right) := d\left(Q,(3,0)\right) = (t-3)^2 + \left(t^2\right)^2$$

$$f'\left(t\right) = 4t^3 + 2t - 6 \overset{!}{=} 0$$

$t = 1$ פותר, ויוצא שהוא הפתרון הממשי היחיד. נוודא מינימום:

$$f''\left(t\right) = 12t^2 + 2 \qquad f''\left(1\right) = 14 > 0 \qquad \checkmark$$

הנקודה המבוקשת:

$$p \equiv Q|_{t=1} = (1,1)$$

והמרחק המינימלי הוא

$$d\left(P,(3,0)\right) = \sqrt{5}$$

דרך ב': שיפוע הישר המחבר בין $(3,0)$ לבין נקודה כללית $Q = \left(t,t^2\right)$ על הפרבולה הוא

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{t^2 - 0}{t - 3}$$

שיפוע המשיק לפרבולה בנקודה כללית Q הוא

$$m_2 = y'|_{x=t} = 2x|_{x=t} = 2t$$

נדרוש שמכפלת השיפועים היא -1:

$$m_1 \cdot m_2 \stackrel{!}{=} -1$$

$$2t \cdot \frac{t^2}{t-3} = -1$$

$$2t^3 = -\left(t-3\right)$$

$$\boxed{2t^3 + t - 3 = 0}$$

קיבלנו אותה משוואה כבמו בדרך א' - ומכאן הפתרון זהה.

עקומות ריבועיות

הגדרה - עקומה ריבועית ב$\mathbb{R}^2$

עקומה ריבועית ב$\mathbb{R}^2$ היא אוסף של משוואות מהסוג

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

כאשר $a, b, \ldots f \in \mathbb{R}$ קבועים.
ניתן לרשום גם

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \vec{b} \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

$$\vec{x}^T A \vec{x} + \vec{b}^T \vec{x} + c = 0$$

דוגמא

- מעגל: $x^2 + y^2 = 1$
- פרבולה: $y = x^2$

מקרים מנוונים:

- זוג ישרים מקבילים:$y^2 - 1 = 0$
- כלום: $x^2 + y^2 = -1$
- נקודה בודדת: $x^2 + y^2 = 0$

תרגיל

סווג והבא לצורה קנונית את העקומה הריבועית הבאה:

$$16x^2 - 32x + 25y^2 - 200y + 16 = 0$$

פתרון

נעזר בהשלמה לריבוע:

$$6\left(x-1\right)^2 - \cancel{16} + 25\left(y-4\right)^2 - 400 + \cancel{16} = 0$$

$$6\left(x-1\right)^2 + 25\left(y-4\right)^2 = 400$$

$$\boxed{\frac{\left(x-1\right)^2}{5^2} + \frac{\left(y-4\right)^2}{4^2} = 1}$$

נחליף משתנים: $\begin{matrix} x' & = & x-1 \\ y' & = & y-4 \end{matrix}$ לקבל:

$$\frac{\left(x'\right)^2}{5^2} + \frac{\left(y'\right)^2}{4^2} = +1$$

אליפסה עם מרכז בנקודה $(1,4)$ וחצאי הצירים באורכים $5,4$
למעשה, אפשר היה לדעת שזו אליפסה מהערכים העצמיים של A:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \qquad \lambda_{1,2} = 16, 25$$

$\det A > 0$ ולכן זו אליפסה.

תרגיל

כנ"ל עבור

$$x^2 + 4xy - 2y^2 + 1 = 0$$

פתרון

הפעם יש איבר מעורב xy, אותו אי אפשר להעיף עם השלמה לריבוע.

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 1 = 0$$

ע"ע של A:

$$\det\left(A-\lambda I\right)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & -2-\lambda\end{bmatrix}=\left(1-\lambda\right)\left(-2-\lambda\right)-4\overset{!}{=}0$$

$$\lambda^{2}+\lambda-6=9\implies\boxed{\lambda_{1,2}=-3,2}$$

$\lambda_{1,2}$ בעלי סימנים הפוכים $\Longleftarrow$ היפרבולה.
וקטורים עצמיים:

$$\lambda_{1}=2\qquad\vec{v}_{1}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\qquad A\vec{v}_{1}=\lambda_{1}\vec{v}_{1}\qquad\left(A-\lambda_{1}I\right)\vec{v}_{1}=\vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\implies-a+2b=0\implies a=2b\implies\vec{v}_{1}=\begin{pmatrix}2b\\ b\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\left\Vert \vec{v}_{1}\right\Vert =\left|b\right|\left\Vert \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\right\Vert =\left|b\right|\sqrt{5}$$

ניקח $b=\frac{1}{\sqrt{5}}$ לקבל $\hat{v}_{1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$.

$$\lambda_{2}=-3\qquad\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\qquad4a+2b=0\qquad b=-2a$$

$$\vec{v}_{2}=\begin{pmatrix}a\\ -2a\end{pmatrix}\qquad a=\frac{1}{\sqrt{5}}\qquad\hat{v}_{2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$$

המטריצה המלכסנת היא:

$$P=\begin{bmatrix}| & |\\ D_{1} & D_{2}\\ | & |\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

נגדיר משתנים חדשים x',y' ע"י

$$P\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

המשוואה הייתה:

$$\vec{x}^{T}A\vec{x}+1=0$$

$$\left(P\vec{x}'\right)^{T}A\left(P\vec{x}'\right)+1=0$$

$$\vec{x}'^{T}\underbrace{P^{T}AP}_{D}\vec{x}'+1=0$$

$$(x',y')\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}+1=0$$

$$2\left(x'\right)^2-3\left(y'\right)^2+1=0$$

$$2\left(x'\right)^2-3\left(y'\right)^2=-1$$

$$\frac{\left(x'\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}-\frac{\left(y'\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=-1$$

$$-\frac{\left(x'\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{\left(y'\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=+1$$

ורואים שמדובר בהיפרבולה

נחזור למשוואה המקורית:

$$x^2+4xy-2y^2+1=0$$

נחלץ את y:

$$(-2)\,y^2+(4x)\,y+\left(x^2+1\right)=0$$

$$y_{1,2}=\frac{-4x\pm\sqrt{16x^2-4\,(-2)\,(x^2+1)}}{-4}=\frac{-4x\pm\sqrt{24x^2+8}}{-4}$$

אם אנחנו מסתכלים רחוק מאוד ממכזר ההיפרבולה, $|x|$מאוד מאוד גדול, ואז

$$y_{1,2}\approx\frac{-4x\pm\sqrt{24x^2}}{-4}=x\pm\frac{\sqrt{24}\cdot|x|}{-4}=x\pm\frac{2\sqrt{6}}{4}x\implies\begin{array}{ccc}y & = & \left(1+\frac{2\sqrt{6}}{4}\right)x\\ y & = & \left(1-\frac{2\sqrt{6}}{4}\right)x\end{array}$$

ואלו האסימפטוטות של ההיפרבולה.

דרך אחרת למצוא אסימפטוטות היא לעבור לצורה קנונית, למצוא אסימפטוטות בקלות, ולחזור חזרה עם P^{-1}.

תרגיל

רק לסווג הפעם:

$$x^2-2xy+y^2+y=0$$

פתרון

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\lambda^2-2\lambda=0 \implies \lambda\left(\lambda-2\right)=0 \implies \lambda_{1,2}=0,2$$

לכן זוהי משוואה של פרבולה.

משטחים ריבועיים

הפעם יש גם z:

$$a\cdot x^2+b\cdot y^2+c\cdot z^2+2d\cdot xy+2e\cdot xz+2f\cdot yz+g\cdot x+h\cdot y+j\cdot z+k=0$$

תרגיל

סווג והבא לצורה קנונית:

$$x^2+4y^2+z^2-2x=0$$

פתרון

$$\left(x-1\right)^2-1+4y^2+z^2=0$$

$$\left(x-1\right)^2+4y^2+z^2=1$$

$$\frac{\left(x-1\right)^2}{1^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{z^2}{1^2}=1$$

כל המקדמים חיוביים ובאגף ימין יש $+1$ - לכן מדובר באליפסואיד. מרכזו בנקודה $(1,0,0)$.
חצאי צירים באורכים $1,\frac{1}{2},1$.

תרגיל

סווג:

$$9x^2+5y^2+5z^2+12xy++6xz+5x-6y-32=2$$

פתרון

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \lambda_{1,2,3} = 14, 5, 0$$