תרגילים על משטחים:

אדום – חומר שלא יהיה במבחן, מסתבר, אבל אני לא מוחק את זה אחרי כל העבודה.

1. משטחי סיבוב.

חקרו את משטחי הסיבוב הבאים:

א. ספירה: $\gamma(t) = (a\sin t, 0, a\cos t)$, $0 < t < \pi$

$$g = f' = -g'' = a\cos t \;,\; f = -g' = -f'' = a\sin t$$

נציב את כל הערכים הרלוונטיים בנוסחאות של משטחי הסיבוב

$$G = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 sin^2\phi \end{pmatrix}, L = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 sin^2\phi \end{pmatrix}, S = -LG^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k_1 = k_2 = 1 \,, K = k_1 k_2 = 1 \,, H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 1$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0 \,, \Gamma_{12}^2 = \frac{\cos\phi}{\sin\phi} \,, \Gamma_{22}^1 = \sin\phi \cdot \cos\phi$$

זו לא מסילה סגורה.

ב. היפרבולואיד חד יריעתי: $\gamma(t) = \left(\sqrt{t^2 + r}, 0, t\right)$, $-\infty < t < \infty$

$$g = t \,, g' = 1 \,, g'' = 0 \,, f = \sqrt{t^2 + r} \,, f' = \frac{t}{\sqrt{t^2 + r}} \,, f'' = \frac{r}{\sqrt{t^2 + r}^3}$$

נציב את כל הערכים הרלוונטיים של משטחי הסיבוב

$$G = \begin{pmatrix} \frac{2\phi^2 + r}{\phi^2 + r} & 0 \\ 0 & \phi^2 + r \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} \frac{-r}{(\phi^2 + r)\sqrt{2\phi^2 + r}} & 0 \\ 0 & \frac{\phi^2 + r}{\sqrt{2\phi^2 + r}} \end{pmatrix}$$

$$S = -LG^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{2\phi^2 + r}^3} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2\phi^2 + r}} \end{pmatrix}$$

$$k_1 = \frac{r}{\sqrt{2\phi^2 + r}^3} \,, k_2 = \frac{-1}{\sqrt{2\phi^2 + r}} \,, K = k_1 k_2 = \frac{-r}{(2\phi^2 + r)^2} \,, H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{-\phi^2}{\sqrt{2\phi^2 + r}^3}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0 \,, \Gamma_{11}^1 = \frac{rt(\phi^2 + r)}{(2\phi^2 + r)^{23}} \,, \Gamma_{12}^2 = \frac{\phi}{\phi^2 + r} \,, \Gamma_{22}^1 = \frac{\phi(\phi^2 + r)}{2\phi^2 + r}$$

ג. טורוס 8 - $\gamma(t) = (\sin t + 2, 0, \sin t \cos t)$

$$g = \sin t\cos t \;, g' = \cos^2 t - \sin^2 t \;, g'' = -4\sin t\cos t$$

$$f=\sin t+2\,,f'=\cos t\,,f''=-\sin t$$

נציב את כל הערכים הרלוונטיים של משטחי הסיבוב

$$G=\begin{pmatrix}\cos^4\phi-\cos^2\phi\sin^2\phi+\sin^4\phi+\cos^2\phi & 0\\ 0 & \sin^2\phi+4\sin\phi+4\end{pmatrix}$$

$,L$

$$=\frac{1}{\sqrt{\cos^4\phi-\cos^2\phi\sin^2\phi+\sin^4\phi+\cos^2\phi}}\begin{pmatrix}-3\sin\phi\cos^2\phi\ -\sin^3\phi & 0\\ 0 & \dfrac{\cos^2\phi-\sin^2\phi}{\sin\phi+2}\end{pmatrix}$$

$,S=-LG^{-1}$

$$=\frac{1}{\sqrt{\cos^4\phi-\cos^2\phi\sin^2\phi+\sin^4\phi+\cos^2\phi}}\begin{pmatrix}\dfrac{3\sin\phi\cos^2\phi\ \sin^3\phi}{\cos^4\phi-\cos^2\phi\sin^2\phi+\sin^4\phi+\cos^2\phi} & 0\\ 0 & \dfrac{\sin^2\phi-\cos^2\phi}{(\sin\phi+2)^3}\end{pmatrix}$$

2. יהי משטח סגור (חסום ובלי שפה) $S\subseteq\mathbb{R}^3$. הוכיח שיש נקודה על המשטח עם עקמומיות גאוס חיובית:

תהי $O\in\mathbb{R}^3$ נקודה במרחב, ותהי $d:S\to\mathbb{R}^3$ הפונקציה $d(p)=\|p-O\|$. היא כמובן רציפה. ניקח איזשהו נקודה $P\in S$ שהיא מקסימום ב- S של d (רקיים בגלל ש- S קומפקטי). נוכיח שב- P העקמומיות חיובית.

בשביל לפשט דברים, נזיז ולסובב את המרחב עד ש:

א. $P=(0,0,0)$
ב. המישור המשיק ל- S ב- P הוא המישור $z=0$.
ג. קורדינאטת ה- z של O גדולה מ-0. (אם $O=(x,y,z)$ אז $z\geq 0$)

כעת, לפי משפט הפונקי' הסתומה, יש ל- S פרמטריזציה מקומית, בסביבה של P, שהיא גרף $\mathrm{X}(u,v)=\big(u,v,f(u,v)\big)$ השל פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ העם P $f(0,0)=(0,0,0)=P$. המישור המשיק ב- P נפרש ע"י $\mathrm{X}_1'(0,0)=\big(1,0,f_u'(0,0)\big)$ ו- $\mathrm{X}_2'(0,0)=\big(0,1,f_v'(0,0)\big)$ ולפי ב' $f_u'(0,0)=f_v'(0,0)=0$.

ניתן להוכיח שהקורדינאטות של x,y של O שווים 0, מה שאומר ש- O נמצא ישירות מעל P. הרעיון הוא שאחרת, אם היינו הולכים מרחק אינפינטסימלי בכיוון ההפוך לאותם (x,y), ל- $\mathrm{X}(-\epsilon x,-\epsilon y)=\big(-\epsilon x,-\epsilon y,f(-\epsilon x,-\epsilon y)\big)$, היינו מתרחקים מ- O.

פורמלית, לפי קירוב טיילור $f(u,v)=au^2+2buv+cv^2+o\left(\sqrt{u^2+v^2}^{\,3}\right)$ ולכן

$$d\big(\mathrm{X}(u,v)\big)=\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2+(f(u,v)-z)^2}$$
$$=\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2+\left(au^2+2buv+cv^2+o\left(\sqrt{u^2+v^2}^{\,3}\right)-z\right)^2}$$

ולכן

$$d\big(X(u,v)\big)'_u = \frac{(u-x)+\left(au^2+2buv+cv^2+o\left(\sqrt{u^2+v^2}^3\right)-z\right)\left(2au+2bv+o(u^2+v^2)\right)}{(u-x)^2+(v-y)^2+\left(au^2+2buv+cv^2+o\left(\sqrt{u^2+v^2}^3\right)-z\right)^2}$$

בגלל שהפונקציה הזאת מקבלת מקסימום מקומי ב- $(0,0)$

$$d\big(X(0,0)\big)'_u = \frac{-x}{x^2+y^2+z^2} = 0$$

ולכן $x = 0$. בדיקה דומה של נגזרת לפי v תיתן $y = 0$. יוצא ש- $O = (0,0,z)$.

... אני אסיים את זה מחר.

3. שאלה על נוסחאות

א. בטא את מקדמי כריסטופל Γ_{ij}^k באמצעות מקדמי המטריקה g_{ij}.

כמו שאתם אמורים לזכור, הנוסחה היא $\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\big(g_{ik:j}+g_{jk:i}-g_{ij:k}\big)g^{km}$. אם נכפיל את הביטוי מימין ב- $2g_{ml}$ וקבל נוסחא שקולה (ופשוטה יותר, כי אין בה מטריצות הפוכות).

$$2\Gamma_{ij}^m g_{ml} = \big(g_{ik:j}+g_{jk:i}-g_{ij:k}\big)g^{km}g_{ml} = \big(g_{ik:j}+g_{jk:i}-g_{ij:k}\big)\delta_l^k = g_{il:j}+g_{jl:i}-g_{ij:l}$$

אז נוכיח את זה.

לפי ההגדרה

$$g_{ij:l} = \frac{\partial}{\partial u^l}\langle X'_i, X'_j\rangle = \langle\frac{\partial}{\partial u^l}X'_i, X'_j\rangle + \langle X'_i, \frac{\partial}{\partial u^l}X'_j\rangle = \langle X''_{il}, X'_j\rangle + \langle X'_i, X''_{jl}\rangle$$

אם ככה יוצא ש (כל הזוגות באותו צבע הם אותו ביטוי)

$$g_{il:j}+g_{jl:i}-g_{ij:l} = \langle X''_{ij}, X'_l\rangle + \langle X'_i, X''_{lj}\rangle + \langle X''_{ji}, X'_l\rangle + \langle X'_j, X''_{li}\rangle - \langle X''_{il}, X'_j\rangle - \langle X'_i, X''_{jl}\rangle = 2\langle X''_{ij}, X'_l\rangle$$

לפי הגדרת Γ_{ij}^k ו- L_{ij} זה שווה ל-

$$2\langle \Gamma_{ij}^m X'_m + L_{ij}N, X'_l\rangle = 2\Gamma_{ij}^m\langle X'_m, X'_l\rangle + 2L_{ij}\langle N, X'_l\rangle$$

לפי הגדרת התבנית היסודית הראשונה $g_{ml} = \langle X'_m, X'_l\rangle$, ולפי הגדרת הנורמל $\langle N.X'_l\rangle = 0$. וסיימנו.

ב. הוכח שהביטוי $\frac{\partial}{\partial u^m}\big(\Gamma_{ij}^k X'_k + L_{ij}N\big)$ הוא סימטרי ביחס ל- j ו- k.

לפי הגדרת Γ_{ij}^k ו- L_{ij} מתקיים ש- $X''_{ij} = \Gamma_{ij}^k X'_k + L_{ij}N$. הביטוי שלנו הוא, אם כן, רק $\frac{\partial}{\partial u^m}X''_{ij} = X'''_{ijm}$. ניתן להחליף את סדר הגזירה כמו בכל פונק' חלקה.

ג. מצא את היחס בין L_{ij} לבין L_l^k.

צריך לזכור את הנוסחא $S = -LG^{-1}$, מה ששקול ל- $L + SG = 0$. ברמת האיברים של המטריצות זה אומר $L_{ij} + L_i^k g_{kj} = 0$, אז זה מה שצריך להוכיח.

לפי ההגדרה $g_{kj} = \langle X'_k, X'_j \rangle$ ואילו $N'_i = L_i^k X'_k$ וזה ידוע ש- $L_{ij} = \langle N, X''_{ij} \rangle$.

אם כך

$$L_{ij} + L_i^k g_{kj} = \langle N, X''_{ij} \rangle + L_i^k \langle X'_k, X'_j \rangle = \langle N, X''_{ij} \rangle + \langle L_i^k X'_k, X'_j \rangle = \langle N, X''_{ij} \rangle + \langle N'_i, X'_j \rangle$$
$$= \frac{\partial}{\partial u^i} \langle N, X'_j \rangle = \frac{\partial}{\partial u^i} 0 = 0$$

השיוויון השניים-לפני-אחרון הוא כלל ליבניץ המורחב לנגזרת של מכפלה פנימית. עברתי אליו אתכם בכיתה. השיוויון הלפני אחרון הוא תכונה ידוע של הנורמל – N מאונך לכל X'_j.

ד. הוכח שהביטוי $L_{i[j}L_{l]}^k$ הוא פנימי (הבא אותו במונחים של מקמי המטריקה, מקדמי כריסטופל, ו/או נגזרותיהם).

$$L_{i[j}L_{l]}^k = \frac{1}{2}\left(L_{ij}L_l^k - L_{il}L_j^k\right)$$

הוא ביטוי שיופיע בנגזרת השלישית של X, בנגזרת שנייה יש $L_{ij}N$ ו- L_l^k מגיע מהנגזרת של N.

$$X'''_{ijk} = \frac{\partial}{\partial u^k} X''_{ij} = \frac{\partial}{\partial u^k}\left(\Gamma_{ij}^m X'_m + L_{ij}N\right) = \Gamma_{ij:k}^m X'_m + \Gamma_{ij}^m X''_{mk} + L_{ij:k}N + L_{ij}N'_k$$
$$= \Gamma_{ij:k}^l X'_l + \Gamma_{ij}^m\left(\Gamma_{mk}^l X'_l + L_{mk}N\right) + L_{ij:k}N + L_{ij}L_k^l X'_l$$
$$= \Gamma_{ij:k}^l X'_l + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^l X'_l + \Gamma_{ij}^m L_{km}N + L_{ij:k}N + L_{ij}L_k^l X'_l$$
$$= \left(\Gamma_{ij:k}^l + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l + L_{ij}L_k^l\right)X'_l + \left(\Gamma_{ij}^m L_{mk} + L_{ij:k}\right)N$$

כזכור, כמו ב-ב', $X'''_{ijk} = X'''_{ikj}$ ולכן $X'''_{i[jk]} = \frac{1}{2}\left(X'''_{ijk} - X'''_{ikj}\right) = 0$. אלפי החישוב הקודם:

$$0 = X'''_{i[jk]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ij:k}^l - \Gamma_{ik:j}^l + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l + L_{ij}L_k^l - L_{ik}L_j^l\right)X'_l$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ij}^m L_{km} - \Gamma_{ik}^m L_{jm} + L_{ij:k} - L_{ik:j}\right)N$$
$$= \left(\Gamma_{i[j:k]}^l + \Gamma_{i[j}^m \Gamma_{k]m}^l + L_{i[j}L_{k]}^l\right)X'_l + \left(\Gamma_{i[j}^m L_{k]m} L_{i[j:k]}\right)N$$

ובגלל ש- X'_1, X'_2, N בסיס, כל המקדמים בצירוף הליניארי הזה שווים 0. בפרט $\Gamma_{i[j:k]}^l + \Gamma_{i[j}^m \Gamma_{k]m}^l + L_{i[j}L_{k]}^l = 0$, מה שאומר ש- $L_{i[j}L_{k]}^l = -\Gamma_{i[j:k]}^l - \Gamma_{i[j}^m \Gamma_{k]m}^l$. וסיימנו.

ה. הוכיחו שעקמומיות גאוס שווה ל- $\frac{2}{g_{11}} L_{1[1}L_{2]}^2$.

נפשט: $-\frac{2}{g_{11}} L_{1[1}L_{2]}^2 = -\frac{1}{g_{11}}\left(L_{11}L_2^2 - L_{12}L_1^2\right) = \frac{1}{g_{11}}\left(L_{12}L_1^2 - L_{11}L_2^2\right) = \frac{1}{g_{11}}\left(L_{21}L_1^2 - L_{11}L_2^2\right)$

השיוויון האחרון הוא הסימטריה $L_{12} = L_{21}$.

כעת נשתמש בנוסחא $L = -SG$, שניבע כנוסחא של מקדמי המטריצה $L_{ij} = -L_i^k g_{kj}$.

$$-\frac{2}{g_{11}}L_{1[1}L_{2]}^2 = \frac{1}{g_{11}}(L_{21}L_1^2 - L_{11}L_2^2) = \frac{1}{g_{11}}(-L_2^k g_{k1}L_1^2 + L_1^k g_{k1}L_2^2)$$
$$= \frac{1}{g_{11}}(L_1^1 g_{11}L_2^2 + L_1^2 g_{21}L_2^2 - L_2^1 g_{11}L_1^2 - L_2^2 g_{21}L_1^2)$$
$$= \frac{1}{g_{11}}(L_1^1 g_{11}L_2^2 - L_2^1 g_{11}L_1^2) = L_1^1 L_2^2 - L_2^1 L_1^2 = \det S = K$$

4. תהי עקומה $\beta = \mathrm{X} \circ \alpha$ על משטח בפרמטריזציה X. נניח שלכל t, הוקטור $\beta''(t)$ הוא פרופורציונלי לוקטור $\mathrm{X}_1' \times \mathrm{X}_2'$. מצאו זוג משוואות דיפרנציאלית שמקויימות על ידי הרכיבים α^1, α^2 של α.

אלה המשוואות הגאודזיות $\frac{d^2\alpha^k}{(dt)^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt} = 0$, זה ש- $\beta''(t)$ פרופורציונלי ל- $\mathrm{X}_1' \times \mathrm{X}_2'$, ולכן ל- $N = \frac{\mathrm{X}_1' \times \mathrm{X}_2'}{\|\mathrm{X}_1' \times \mathrm{X}_2'\|}$, זו אחת ההגדרות של עקומה גאודזית.

ניתן להוכיח את זה ישירות. לפי כלל השרשרת $\beta'(t) = \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u^i}(\alpha(t))\frac{d\alpha^i}{dt}(t) = \mathrm{X}_i'(\alpha(t))\frac{d\alpha^i}{dt}$, הפעלה שנייה של נגזרת תיתן

$$\beta''(t) = \mathrm{X}_{ij}''(\alpha(t))\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt} + \mathrm{X}_i'(\alpha(t))\frac{d^2\alpha^i}{(dt)^2}$$
$$= \left(\Gamma_{ij}^k(\alpha(t))\mathrm{X}_k'(\alpha(t)) + L_{ij}(\alpha(t))N\right)\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt} + \mathrm{X}_k'(\alpha(t))\frac{d^2\alpha^k}{(dt)^2}$$
$$= \left(\frac{d^2\alpha^k}{(dt)^2} + \Gamma_{ij}^k(\alpha(t))\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt}\right)\mathrm{X}_k'(\alpha(t)) + L_{ij}(\alpha(t))\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt}N(\alpha(t))$$

עם $\beta''(t)$ פורופורציאני ל- N אז המקדמים האחרים, אילו של X_k', שווים 0. זה אומר $\frac{d^2\alpha^k}{(dt)^2} + \Gamma_{ij}^k(\alpha(t))\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt} = 0$, וסיימנו.

5. תהי עקומה $\gamma(t) = (f(t), 0, g(t))$ במהירות יחידה $(t_1 \le t \le t_2)$ ויהי X משטח הסיבוב שלה.
   a. הביאו את שטח המשטח לפי הפונקציה f.

למשטח יש פרמ' $\mathrm{X}(\phi,\theta) = (f(\phi)\cos\theta, f(\phi)\sin\theta, g(\phi))$, $t_1 \le \phi \le t_2$ ו- $0 \le \theta \le 2\pi$

התבנית היסודית הראשונה היא, כמו שלמדנו (וקל לחשב עם לא זוכרים) $G = \begin{pmatrix} f'^2(\phi) + g'^2(\phi) & 0 \\ 0 & f^2(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2(\phi) \end{pmatrix}$.

תבנית השטח היא, אם כן, $\sqrt{\det G}\, d\phi d\theta = f(\phi) d\phi d\theta$, ואנחנו מחפשים את השטח על כל הפרמטריזציה $\int_0^{2\pi}\int_{t_1}^{t_2} f(\phi) d\phi\, d\theta = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} f(\phi) d\phi$

   b. מצאו את השטח במקרה ש γ הוא מעגל ברדיוס β, שמרכזו מרוחק מרחק α מציר ה- z.

למדנו על פרמטריזציה במהירות יחידה למעגל שכזה, $\gamma(t) = \left(\beta\cos\frac{t}{\beta} + \alpha, 0, \beta\sin\frac{t}{\beta}\right)$, $0 \le \phi \le 2\beta\pi$. אם אתם לא זוכרים את זה קחו את הפרמ' $\gamma(t) = (\beta\cos t + \alpha, 0, \beta\sin t)$, $0 \le \phi \le 2\pi$ ותעברו למהירות יחדה בצורה הרגילה.

כעת לפי א' השטח הוא

$$2\pi\int_0^{2\beta\pi}\left(\beta\cos\frac{\phi}{\beta}+\alpha\right)d\phi=\left(\beta^2\sin\frac{\phi}{\beta}+\alpha\phi\right)\Big|_0^{2\beta\pi}=2\alpha\beta\pi$$

6. תהי פרמטריזציה $\mathrm{X}(u,v)$ של משטח.
   a. הגדר את העקמומיות הראשיות k_1,k_2 של פרמטריזציה.

עלה הערכים העצמיים של המטריצה S, שמייצגת את העתקת ווינגרטן לפי הבסיס $\mathrm{X}_1',\mathrm{X}_2'$.

   b. עם התבניות הראשונה והשנייה מקיימות $g_{12}\equiv L_{12}\equiv 0$, בחר בסיס מתאים והבא את העתקת ווינגרטן כמטריצה ריבועית.

נסמן $G=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{12} & g_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_{11} & 0\\ 0 & g_{22}\end{pmatrix}$ ו- $L=\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12}\\ L_{12} & L_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_{11} & 0\\ 0 & L_{22}\end{pmatrix}$, המטריצות המייצגות של התבנית היסודיות. אזי ידוע שבאותו בסיס כמו ב- א' שמתקיים $S=-LG^{-1}$.

$G^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{g_{11}} & 0\\ 0 & \frac{1}{g_{22}}\end{pmatrix}$ ולכן $S=-LG^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{L_{11}}{g_{11}} & 0\\ 0 & -\frac{L_{22}}{g_{22}}\end{pmatrix}$.

   c. בתנאים של ב', הבאה את הגודל $\frac{k_1}{k_2}$ לפי האיברים של התבניות הראשונה והשנייה.

הערכים העצמיים של S הזאת הם $k_1=-\frac{L_{11}}{g_{11}}$ ו- $k_2=-\frac{L_{22}}{g_{22}}$. אם כן $\frac{k_1}{k_2}=\frac{L_{11}g_{22}}{g_{11}L_{22}}$.

   d. חשב את $\frac{k_1}{k_2}$ עבור משטח הסיבוב של העקומה $y=0, x=z^2+\frac{1}{4}$.

ניקח פרמ' לעקומה $\gamma(t)=\left(t^2+\frac{1}{4},0,t\right)$. משטח הסיבוב הוא $\mathrm{X}(\phi,\theta)=\left(\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)\cos\theta,\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)\sin\theta,\phi\right)$.

פה $f(\phi)=\phi^2+\frac{1}{4}$, $f'(\phi)=2\phi$, $f''(\phi)=2$, $g(\phi)=\phi$, $g'(\phi)=1$ ו- $g''(\phi)=0$.

למדנו שלמשטחי סיבוב

$$G=\begin{pmatrix} {f'}^2(\phi)+{g'}^2(\phi) & 0\\ 0 & f^2(\phi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\phi^2+1 & 0\\ 0 & \left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^2\end{pmatrix}$$

ו-

$$L=\frac{1}{\sqrt{{f'}^2(\phi)+{g'}^2(\phi)}}\begin{pmatrix} f'(\phi)g''(\phi)-g'(\phi)f''(\phi) & 0\\ 0 & f(\phi)g'(\phi)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4\phi^2+1}}\begin{pmatrix} -2 & 0\\ 0 & \phi^2+\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

אם משהו לא זוכר את הנוסחאות, אפשר לחשב ישירות. זה לא ארוך.

ולכן

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{L_{11}g_{22}}{g_{11}L_{22}}=\frac{\frac{-2}{\sqrt{4\phi^2+1}}\cdot\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^2}{(4\phi^2+1)\cdot\frac{\phi^2+\frac{1}{4}}{\sqrt{4\phi^2+1}}}=\frac{-2\cdot\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^2}{(4\phi^2+1)\cdot\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)}=\frac{-2\cdot\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)}{(4\phi^2+1)}$$
$$=\frac{-2\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)}{4\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)}=-\frac{1}{2}$$

7. עבור פונקציה $f(x,y)=\frac{a}{y}$, ותהי המטריקה $f^2(x,y)(dx^2+dy^2)$.
   a. מצא תחום מקסימאלי $U\subseteq\mathbb{R}^2$ שבו מוגדרת המטריקה.

התבנית היסודית הראשונה $G=\frac{a^2}{y^2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ צריכה להיות חיובית לחלוטין (הע"ע צריכים להיות חיוביים) ולכן צריך $y>0$. אין שום בעיות אחרות, ולכן $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y>0\}$.

   b. חשב את מקדמי כריסטופל Γ_{ij}^k של המטריקה.

למדנו שעבור מטריקה קונפורמית $f^2(x,y)(dx^2+dy^2)$, אם $\mu=\ln f$, אז $\Gamma_{11}^1=\Gamma_{12}^2=-\Gamma_{22}^1=\mu_1'$ ו- $\Gamma_{22}^2=\Gamma_{12}^1=-\Gamma_{11}^2=\mu_2'$.

במקרה שלנו $f=\frac{a}{y}$, $\mu=\ln\frac{a}{y}=\ln a-\ln y$, $\mu_1'=\mu_x'=0$ ו- $\mu_2'=\mu_y'=-\frac{1}{y}$ ולכן

$\Gamma_{11}^1=\Gamma_{12}^2=\Gamma_{22}^1=0$, $\Gamma_{22}^2=\Gamma_{12}^1=-\frac{1}{y}$ ו- $\Gamma_{11}^2=\frac{1}{y}$.

   c. הגדרת את אופרטור לפלס בלטרמי למטריקה איזוטרמית.

זהו האופרטור $\Delta_{LB}(h)=\frac{1}{f^2}\left(\frac{\partial^2h}{(\partial u^1)^2}+\frac{\partial^2h}{(\partial u^2)^2}\right)$.

   d. חשב את עקמומיות גאוס של המטריקה לפי מקדמי קריסטופל

קודם נחשב $\Gamma_{11:2}^2=\left(\frac{1}{y}\right)_y'=-\frac{1}{y^2}$ ו- $\Gamma_{12:1}^2=0_x'=0$.

כעת, לפי הנוסחא

$$K=\frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma_{1[1:2]}^2+\Gamma_{1[1}^i\Gamma_{2]i}^2\right)=\frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma_{11:2}^2-\Gamma_{12:1}^2+\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2-\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2+\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2\right)$$
$$=\frac{1}{\frac{a^2}{y^2}}\left(-\frac{1}{y^2}-0+0\cdot\left(-\frac{1}{y}\right)-\left(-\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\cdot\left(-\frac{1}{y}\right)-0\cdot0\right)$$
$$=\frac{y^2}{a^2}\left(-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y^2}\right)=-\frac{1}{a^2}$$

   e. חשב את עקמומיות גאוס של המטריקה לפי אופרטור לפלס בלטרמי.

במקרה שלנו אופרטור לפלס בלטרמי יהיה $\Delta_{LB}(h)=\frac{y^2}{a^2}\left(h_{xx}''+h_{yy}''\right)$. המשפט אומר ש-

$$K = -\frac{1}{2}\Delta_{LB}(\ln f^2) = -\frac{1}{2}\Delta_{LB}(2\ln f) = -\Delta_{LB}(\ln f) = -\Delta_{LB}(\mu)$$

במקרה שלנו $\mu = \ln a - \ln y$, $\mu'_x = \mu''_{xx} = 0$, $\mu'_y = -\frac{1}{y}$, $\mu''_{yy} = \frac{1}{y^2}$ ו-

$$K = -\Delta_{LB}(\mu) = -\frac{y^2}{a^2}\left(0 + \frac{1}{y^2}\right) = -\frac{1}{a^2}$$

f. כתוב את המשוואות הגאודזיות של המטריקה.

עבור עקומה $\alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ המשוואות הגאודזיות מקבלות את הצורה.:

$$\frac{d^2x}{(dt)^2} + \Gamma^1_{11}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\Gamma^1_{12}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \Gamma^1_{22}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2y}{(dt)^2} + \Gamma^2_{11}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\Gamma^2_{12}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \Gamma^2_{22}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0$$

במקרה שלנו,

$$\frac{d^2x}{(dt)^2} - \frac{2}{y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2y}{(dt)^2} + \frac{1}{y}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) = 0$$

8. עבור פונקציה $f(x,y) = \left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)^{-1}$, כאשר $\rho > 0$ פרמטר, תהי המטריקה $f^2(x,y)(dx^2+dy^2)$.

a. מצא תחום מקסימאלי $U \subseteq \mathbb{R}^2$ שבו מוגדרת המטריקה.

שוב, התבנית היסודית הראשונה $G = \left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)^{-2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ צריכה להיות חיובית לחלוטין ולכן צריך $1 + \frac{\rho}{4}(x^2+y^2) > 0$, אבל זה תמיד קורה. לכן $U = \mathbb{R}^2$ יהיה התחום המקסימלי.

b. חשב את מקדמי כריסטופל Γ^k_{ij} של המטריקה.

שוב נגדיר $\mu = \ln f = -\ln\left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)$, ולכן

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = -\Gamma^1_{22} = \mu'_1 = -\frac{1}{1 + \frac{\rho}{4}(x^2+y^2)}\cdot\frac{\rho}{2}x = -\frac{\rho x}{2 + \frac{\rho}{2}(x^2+y^2)}$$

ובדומה

$$\Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = -\Gamma^2_{11} = \mu'_2 = -\frac{\rho y}{2 + \frac{\rho}{2}(x^2+y^2)}$$

c. תנו ארבעה שיטות לחישוב של עקמומיות גאוס של משטח.

ישנן 5 נוסחאות, בסך הכל:

לפרמטריזציה של משטח ב- $\mathbb{R}^3$ יש את 3 הנוסחאות:

$$K = \det S = \frac{\det L}{\det G} = -\frac{2}{g_{11}} L_{1[1} L_{2]}^{2}$$

בכל מקרה, יש את הנוסחא מהמשפט המדהים של גאוס:

$$K = \frac{2}{g_{11}} \left(\Gamma_{1[1:2]}^{2} + \Gamma_{1[1}^{i} \Gamma_{2]i}^{2} \right)$$

ואם המטריקה קונפורמית (= הפרמטריזציה איזוטרמית) ניתן להשתמש בלפלס בלטרמיי:

$$K = -\frac{1}{2} \Delta_{LB} (\ln f^2)$$

d. הסבירו אילו מהשיטות יכולות לפעל פה.

בגלל שלא מדובר על משטח ב- $\mathbb{R}^3$, אלא על משטח מופשט, שיטות 1-3 לא פועלות פה.

שיטה 4 תמיד פועלת, ובגלל שזו מטריקה קונפורמית גם שיטה 5 פועלת פה.

e. חשב את עקמומיות Gauss של מטריקה $f^2(x,y)(dx^2 + dy^2)$.

במקרה שלנו

$$\Delta_{LB}(h) = \frac{1}{f^2} \left(h''_{xx} + h''_{yy} \right) = \left(1 + \frac{\rho}{4} (x^2 + y^2) \right)^2 \left(h''_{xx} + h''_{yy} \right)$$

כמו ב-7,

$$K = -\frac{1}{2} \Delta_{LB} (\ln f^2) = -\frac{1}{2} \Delta_{LB} (2 \ln f) = -\Delta_{LB} (\ln f) = -\Delta_{LB}(\mu)$$
$$= \left(1 + \frac{\rho}{4} (x^2 + y^2) \right)^2 \left(\mu''_{xx} + \mu''_{yy} \right)$$

ופה

$$\mu = -\ln \left(1 + \frac{\rho}{4} (x^2 + y^2) \right)$$

ולכן:

$$\mu'_x = -\frac{\rho x}{2 + \frac{\rho}{2} (x^2 + y^2)}$$

ו-

$$\mu''_{xx} = -\frac{\rho \left(2 + \frac{\rho}{2} (x^2 + y^2) \right) - \rho^2 x^2}{\left(2 + \frac{\rho}{2} (x^2 + y^2) \right)^2} = \frac{\frac{\rho^2}{2} (x^2 - y^2) - 2\rho}{\left(2 + \frac{\rho}{2} (x^2 + y^2) \right)^2}$$

ובדומה

$$\mu''_{yy} = \frac{\frac{\rho^2}{2}(y^2 - x^2) - 2\rho}{\left(2 + \frac{\rho}{2}(x^2 + y^2)\right)^2}$$

נציב:

$$K = \left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)\right)^2 \left(\mu''_{xx} + \mu''_{yy}\right) = \left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)\right)^2 \left(\frac{-4\rho}{\left(2 + \frac{\rho}{2}(x^2 + y^2)\right)^2}\right)$$
$$= -4\rho$$

f. כתוב את המשוואות הגאודזיות של המטריקה.

כמו ב-7:

$$\frac{d^2x}{(dt)^2} + \Gamma^1_{11}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\Gamma^1_{12}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \Gamma^1_{22}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2y}{(dt)^2} + \Gamma^2_{11}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\Gamma^2_{12}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \Gamma^2_{22}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0$$

ובמקרה שלנו,

$$\frac{d^2x}{(dt)^2} - \frac{\rho}{2 + \frac{\rho}{2}(x^2 + y^2)}\left(x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2y\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} - x\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) = 0$$

$$\frac{d^2y}{(dt)^2} - \frac{\rho}{2 + \frac{\rho}{2}(x^2 + y^2)}\left(-y\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2x\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + y\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) = 0$$