ד"ר עינת אביאלי
הוקלד ע"י דביר חדד

הרצאה 7 -12.8.12

<u>משתנים מקריים רציפים</u>:

כעת נדון במשתנים מקריים שקבוצת הערכים האפשריים שלהם אינה בת מנייה, כגון: זמן חיים של מקרר, הרגע בו עוצרת רכבת בתחנה, וכו'. נאמר שx הוא משתנה מקרי רציף אם קיימת פונקציה אי שלילית f המוגדרת לכל x ממשי, כלומר $f(x) \geq 0$. כאשר לכל קבוצה B של מספרים ממשים מתקיים: $f(x \in B) = \int_B f(x)dx$ הפונקציה f נקראת פונקצית הצפיפות של המשתנה המקרי x.

f חייב לקיים:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
2. $p(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$
3. אם נציב $a=b$ אזי $p(x = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$

ומשלוש נובע כי $p(x < a) = p(x \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

דוגמה:

יהי x משתנה מקרי רציף בעל פונ' צפיפות $f(x) = \begin{cases} c(4x-2x^2) \,;\, 0 < x < 2 \\ 0 \,;\, \text{אחרת} \end{cases}$.

א) מצאו את c

ב) חשבו את $p(x>1)$.

פתרון:

א) ע"פ התכונות של פונקצית צפיפות נקבל: $\int_0^2 c(4x-2x^2)dx = c\left[\frac{4x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = 1$

וחישוב פשוט ייתן לנו ש $c = \frac{3}{8}$.

ב) שוב, ע"פ הגדרה: $p(x > 1) = \int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^2 \frac{3}{8}(4x-2x^2)dx = \frac{3}{4}$.

<u>הגדרה</u>: $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$.

טענה: אם x משתנה מקרי רציף בעלי פונקצית צפיפות $f(x)$, אזי לכל פונקציה ממשית g מתקיים (בדומה למשתנה מקרי בדיד) $E\big(g(x)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)dx$.

<u>הגדרה</u>: $V(x) = E(x^2) - E^2(x)$.

הערות: $V(ax+b)=a^2V(x)$, $E(ax+b)=aE(x)+b$.

הגדרה: פונקצית ההתפלגות המצטברת מוגדרת להיות $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. $F'(x) = f(x)$.

דוגמה:

X מ"מ בעל פונקצית צפיפות $f(x) = \begin{cases} 2x \,;\, 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \,;\, \text{אחרת} \end{cases}$. חשבו את א) התוחלת וב) השונות.

פתרון:

א) $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^1 x \cdot 2xdx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

ב) ראשית: $E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^1 2x^3dx = \left[\frac{2x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$, וע"פ הנוסחה לשונות נקבל כי $V(x) = \frac{9}{18} - \frac{8}{18} = \frac{1}{18}$.

ד"ר עינת אביאלי
הוקלד ע"י דביר חדד

דוגמה נוספת:

נתונה פונקצית צפיפות של x $f(x)=\begin{cases}1\,;0\le x\le 1\\ 0\,;\text{אחרת}\end{cases}$. חשבו את $E(e^x)$.

פתרון: $E(e^x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^x\cdot f(x)dx=\int_0^1 e^x dx=e-1$.

התפלגויות רציפות מיוחדות:

1. משתנה מקרי אחיד

נאמר על משתנה מקרי שיש לו התפלגות אחידה בקטע *[0,1]* אם פונקצית הצפיפות שלו נתונה ע"י $f(x)=\begin{cases}1\,;0\le x\le 1\\ 0\,;\text{אחרת}\end{cases}$. וגם $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$.

מכיוון ש *f(x)>0* רק כאשר $x\in[0,1]$ הרי ש *x*מקבל בהכרח ערך כלשהו בקטע *[0,1]*. כמו כן, מכך ש*f(x)* קבועה לכל $x\in[0,1]$ נובע ש*x* יכול להימצא בהסתברות שווה בסביבות כל ערך בקטע *[0,1]*. על מנת לבדוק את הטענה, עבור כל *a,b* שבין 0 ל1 ונניח ש *b* גדול מ*a*, מתקיים שההסתברות להיות בקטע הספציפי הנ"ל שווה בערכה לאורך הקטע. $p(a\le x\le b)=b-a$.

באופן כללי נאמר ש *x*הוא משתנה מקרי אחיד בקטע *[α,β]* אם פונקציה הצפיפות שלו נתונה על ידי $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\beta-\alpha}\,;\ \alpha\le x\le\beta\\ 0\,;\text{אחרת}\end{cases}$. מכיוון ש $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$. נקבל את פונקצית ההתפלגות המצטברת עבור קטע אחיד *[α,β]*: $F(x)=\begin{cases}o\,;x<\alpha\\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\,;\ \alpha\le x\le\beta\\ 1\,;x>\beta\end{cases}$.

תכונות: א) $E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}x\cdot\frac{1}{\beta-\alpha}=\frac{\beta+\alpha}{2}$

ב) $E(x^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}x^2\cdot\frac{1}{\beta-\alpha}=\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3}$.

ג) $V(x)=E(x^2)-E^2(x)=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$

דוגמה:

נניח שלx יש התפלגות אחידה ב*[0,10]* $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}\,;0\le x\le 10\\ 0\,;\text{אחרת}\end{cases}$. חשבו את ההסתברויות הבאות: $p(x>3)=\int_0^3\frac{1}{10}dx=\frac{3}{10}$, $p(3<x<8)=\int_3^8\frac{1}{10}dx=\frac{5}{10}=0.5$.

2. משתנה מקרי נורמלי:

נאמר שx הוא משתנה מקרי נורמאלי או שלx יש התפלגות עם הפרמטרים (μ,σ^2) אם פונקציית הצפיפות שלו נתונה ע"י (עבור כל x ממשי) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. הגרף של פונקצית הצפיפות הזו היא עקומת פעמון סימטרית לציר האנכי שעובר בµ. סימון: $x\sim N(\mu,\sigma^2)$.

וכן מתקיים $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1$, $E(x)=\mu$, $V(x)=\sigma^2$.

תכונה: $x\sim N(\mu,\sigma^2)$ אזי y=ax+b מתפלג נורמאלית עם $y\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$. וכן מתקיים $z\sim N(0,1)$ כשאר z משתנה מקרי סטנדרטי.

פונקצית ההתפלגות המצטברת: $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2\pi}e^{\frac{-y^2}{2}}dy$.

הקירוב הנורמאלי להתפלגות הבינומית:

משפט חשוב בתורת ההסתברות, המכונה משפט הגבול של דה מואבר לפלס קובע שכשאר n גדול, ההתפלגות של משתנה מקרי נורמאלי השווה לו בתוחלתו ובשונותו.

המשפט הוא: $\Phi(\mathrm{b})-\Phi(\mathrm{a})=p\left(a\le\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le b\right)$. כאשר S_n זה מהספר ההצלחות עם הסתברות p להצלחה.

דהיינו, $x\sim Bin(n,p)$, אזי $E(x)=np$, $V(x)=np(1-p)$ ולכן $x\sim N(np,np(1-p))$.

ונסמן $Z=\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ ונקבל ש$z\sim N(0,1)$.

הערה: כשעוברים ממשתנה מקרי לרציף צריך לעשות תיקון רציפות.

דוגמה:

יהי x מספר הפעמים שמתקבל H ב40 הטלות של מטבע תקין. מה ההסתברות שx=20?

פתרון:

לפי בינומי: $x\sim(40{,}0.5)$ ולכן $p(x=20)=\binom{40}{20}(\frac{1}{2})^{20}(\frac{1}{2})^{40-20}=0.1254$.

לפי הקירוב הנורמאלי: $p(x=20)=p(19.5\le x\le 20.5)=p\left(\frac{19.5-20}{\sqrt{10}}\le x\le\frac{20.5-20}{\sqrt{10}}\right)$ $=p(-0.158\le x\le 0.158)\cong 0.1256$ וניתן לראות שהמספר זהה בקירוב לזה שקיבלנו לפי הבינומי.

3. משתנה מקרי מעריכי:

על משתנה מקרי רציף שפונקצית הצפיפות שלו נתונה ע"י λ חיובי כלשהו נאמר שהוא משתנה מקרי מעריכי עם הפרמטר λ. פונקצית הצפיפות הינה: $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}\,;x\ge 0\\ 0\,;x<0\end{cases}$. פונקצית ההתפלגות המצטברת נתונה לכל x אי שלילי ע"י $F(x)=\int_0^x\lambda e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda x}$. כמו כן מתקיים $\int_0^\infty f(x)dx=1$. $E(x)=\frac{1}{\lambda},V(x)=\frac{1}{\lambda^2}$. סימון: $x\sim\exp(\lambda)$

הערה: משתנה מקרי מעריכי הוא בעל תכונה של חוסר זיכרון. $p\left(x>s|x>t\right)=p(x>t)$.

דוגמה:

נניח שמשך הזמן בדקות של מספר טלפון היא מ"מ מעריכי עם פרמטר λ=0.1 . אם מישהו נכנס לתא הטלפון הציבורי ברגע שהגעת לתא זה, מה ההסתברות שיהיה עליך לחכות:

א) יותר מ10 דקות

ב) בין 10 ל20 דקות

פתרון:

א) $p(x>10)=1-F(10)=1-1-e^{-1}=0.368$ (וכמובן $x\sim\exp(\frac{1}{10})$)

ב) $p(10<x<20)=F(20)-F(10)=e^{-1}-e^{-2}=0.233$.

<u>לסיכום</u>: פונקציה מצטברת: $F(x)=1-e^{-\lambda x}$, וצפיפות $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.

<u>התפלגות משותפת של משתנים מקריים</u>:

עד כה עסקנו בהתפלגויות של משתנים מקריים יחידים. אולם, לעתים קרובות אנו מעוניינים בהסתברויות של מאורעות המוגדרים באמצעות שני משתנים מקריים או יותר. כדי לדון בהסתברות כזו נגדיר, לכל שני משתנים מקריים x וy את פונקצית ההתפלגות המצטברת המשותפת של x וy ע"י:

$F(a,b)=p\{x\le a,y\le b\}$, a,b ממשיים. את פונקצית ההתפלגות המצטברת של x אפשר לקבל מפונקצית ההתפלגות המצטברת המשותפת של x וy. כדלקמן:

$f_{\mathrm{x}}(a)=p\{x\le a\}=p\{x\le a,y<\infty\}=p(\lim_{b\to\infty}\{x\le a,y\le b\})=\lim_{b\to\infty}F(a,b)=$ $F(a,\infty)$ וקיבלנו את המבוקש. ובאופן דומה $f_y(b)=F(\infty,b)$. קוראים לפונקציות אלה לעיתים פונקציות ההתפלגות המצטברת השולית של x וy בהתאמה.

ד"ר עינת אביאלי
הוקלד ע"י דביר חדד

כל תרגיל ניתן לפתירה ע"י פונקצית ההתפלגות המצטברת: $p\{x > a, y > b\} = 1 - p(\{x > a, y > b\}^c) =$ $1 - p(\{x > a\}^c \cup \{y > b\}^c) = 1 - p(\{x \le a\} \cup \{y \le b\}) = 1 - f_x(a) - f_y(b) + F(a,b)$. וגם אפשר להרחיב ש: $p\{a_1 < x \le a_2, b_1 < y \le b_2\} = F(a_1,b_1) + F(a_2,b_2) - F(a_1,b_2) - F(a_2,b_1)$ כל אימת שמתקיים $b_1 < b_2, a_1 < \mathrm{a}_2$.

אם x,y משתנים מקריים בדידים מגדירים:
פונקצית ההסתברות המשותפת $p(x,y) = p\{X = x, Y = y\}$
ופונקצית ההסתברות המתקבלת של x היא $p_x(x) = P\{X = x\} = \sum_{y:p(x,y)>0} p(x,y)$
ובאופן דומה נקבל: $p_y(y) = P\{Y = y\} = \sum_{x:p(x,y)>0} p(x,y)$.

דוגמה:
בוחרים באקראי בלי החזרה 3 כדורים מתוך כד המכיל 3 אדומים, 4 לבנים ו5 כחולים. *X* מספר הכדורים האדומים שנבחרו, ו*y* מספר הלבנים. אזי, פונקצית ההסתברות המשותפת של *x,y* (נשתמש בטבלה).

מספר לבנים \ מספר שחורים	0	1	2	3	סכום השורה
0	$^{10}/_{220}$	$^{40}/_{220}$	$^{30}/_{220}$	$^{4}/_{220}$	$^{84}/_{220}$
1	$^{30}/_{220}$	$^{60}/_{220}$	$^{18}/_{220}$	0	$^{108}/_{220}$
2	$^{15}/_{220}$	$^{12}/_{220}$	0	0	$^{27}/_{220}$
3	$^{1}/_{220}$	0	0	0	$^{1}/_{220}$
סכום העמודה	$^{56}/_{220}$	$^{112}/_{220}$	$^{48}/_{220}$	$^{4}/_{220}$	1

אומרים של*x* ו*y* יש התפלגות משותפת רציפה אם קיימת פונקציה אי שלילית *f(x,y)* המוגדרת לכל *x,y* ממשיים ולה התכונה, שלכל קבוצה *C* של זוגות מספרים ממשים (כלומר קבוצה במישור הדו מימדי) מתקיים $p(\{(X,Y) \in C\} = \iint_{(x,y)\in C} f(x,y)dxdy$.

יהיו *A,B* קבוצות כלשהן של מספרים ממשים. נגדיר $C = \{(x,y): x \in A, y \in B\}$, ונקבל שמתקיים ע"פ המשוואה הקודמת $p\{x \in A, y \in B\} = \int_B \int_A f(x,y)dxdy$.

ומכיוון שמתקיים: $F(a,b) = p\{x \in (-\infty,a], y \in (-\infty,b]\} = \int_{-\infty}^{b} \int_{-\infty}^{a} f(x,y)dxdy$.

נובע ע"י גזירה כי $f(a,b) = \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} F(a,b)$.

ומכאן: $p\{a < x < a + da, b < y < b + db\} = \int_b^{b+bd} \int_a^{a+ad} f(x,y)dxdy \approx f(a,b)dadb$.

לפיכך, *f(a,b)* היא מידה לסבירות שהערך של וקטור מקרי *(x,y)* יהיה קרוב ל*(a,b)*.

לסיכום: פונקציות הצפיפות של *x* ו*y* הם: $\mathrm{f_y(y)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f(x,y)dx}$. ובהתאם: $\mathrm{f_x(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f(x,y)dy}$.