

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 6: מערכות דינמיות, סוגרי פואסון ומערכות ייחוס מסתובבות

1. חרוז בעל מסה m מאולץ לנוע על חישוק חסר מסה עם רדיוס R . החרוז מחובר לנקודה $(R, 0)$ באמצעות קפיץ בעל קבוע k עם אורך שווי משקל ℓ . המרחק בין החרוז לנקודה $(R, 0)$ הינו x .

(א) הראו כי הלגראנג'יאן נתון ע"י

$$\mathcal{L} = mR^2\dot{\theta}^2 (3 + \cos \theta) / 4 - mR^2\omega^2 (2 \sin(\theta/2) - \ell/R)^2 / 2 - mR^2\Omega^2 \cos \theta, \quad (1)$$

כאשר $\omega^2 = k/m$, $\Omega^2 = g/R$. (רמז: בטאו את x באמצעות (R, θ) .)

(ב) רשמו את משוואות המילטון.

(ג) מצאו את נקודות שווי המשקל כאשר ידוע כי $\ell = R/2$. מהו התנאי לכך שתקבל נקודת שווי משקל לא טריוויאלית?

2. ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני פשוט נתון ע"י $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. נציג כעת את המשתנים $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x + i \frac{p}{m\omega} \right)$, $a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x - i \frac{p}{m\omega} \right)$.

(א) בטאו את \mathcal{H} באמצעות a, a^* .

(ב) חשבו את סוגרי פואסון $\{a, a^*\}$, $\{a, \mathcal{H}\}$, $\{a^*, \mathcal{H}\}$.

(ג) רשמו את משוואות התנועה עבור a, a^* ופתרו אותן.

(ד) בטאו את x, p באמצעות הפתרונות שקיבלתם.

(ה) חשבו את $\{x, p\}$ ע"י שימוש בתוצאות 2.ד. השוו לחישוב הישיר.

3. נתונה מטוטלת פוקו המורכבת מחוט חסר מסה באורך ℓ ומסה m בקצהו. המטוטלת ממוקמת בקו רוחב λ ונוטה בזווית θ . המהירות הזוויתית של כדור"א Ω .

(א) רשמו את הלגראנג'יאן של המטוטלת

(הדרכה: רשמו את מהירות המטוטלת ביחס למערכת האינרציאלית $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}$ כאשר $\vec{v}' = \dot{x}\hat{e} + \dot{y}\hat{n}$ והזניחו איברים $\mathcal{O}(\Omega^2)$. השתמשו בקרוב תנודות קטנות עבור הפוטנציאל, כך ש $\ell^2\theta^2 \approx x^2 + y^2$.)

(ב) כתבו את משוואות אוילר לגראנג' והשוו למשוואות התנועה שקיבלנו בכיתה.

(ג) מצאו את התנעים הקנוניים ורשמו את ההמילטוניאן $\mathcal{H}(\Omega)$

(ד) הראו כי

$$(2) \quad \mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{H}(0) - L\Omega \sin \lambda$$

כאשר L התנע הזיתי. מה המשמעות של $\mathcal{H}(0)$?

(ה) הראו כי התנע הזיתי נשמר

i. ע"י שימוש ב (2)

ii. באמצעות סוגרי פואסון

4. גוף בעל מסה m נזרק אנכית כלפי מעלה במהירות v_0 . הוכיחו כי המקום בו נופל הגוף מוסט מערבה מנקודת הזריקה במרחק Δ השווה ל

$$(3) \quad \Delta = -\frac{4}{3}\Omega \cos \lambda \sqrt{8h^3/g},$$

כאשר Ω המהירות הזויתית של כדור"א, h הגובה המקסימלי ו λ קו הרוחב בו נמצא הגוף.