

פתרון תרגיל 4

1. א) $y = \sqrt[3]{(4x+1)}$ נכתוב את הפונקציה $y = (4x+1)^{\frac{1}{3}}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}(4x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{(4x+1)^2}}$$

ב) $y = \sin(\sqrt{x})$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

ג) $y = e^{x^3}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^3} 3x^2$$

ד) $y = \cos(\ln(x))$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin(\ln(x))}{x}$$

ה) $x(t) = \frac{3t+1}{t-1}$ ו- $y(t) = \frac{5t+2}{t+9}$ שימו לב ש $x(t)$ חח"ע ולכן:
מבוטא לפי t : $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{5(t+9)-(5t+2)}{(t+9)^2}}{\frac{3(t-1)-(3t+1)}{(t-1)^2}} = \frac{\frac{43}{(t+9)^2}}{-\frac{4}{(t-1)^2}} = -\frac{43(t-1)^2}{4(t+9)^2}$$

כעת נרצה לחשב את $\frac{dy}{dx}$ מבוטא לפי x : מכיוון שנתון ש $x(t) = \frac{3t+1}{t-1}$

$$(t-1)x = 3t+1$$

$$tx - x = 3t + 1 \Rightarrow t(x-3) = x+1$$

$$t = \frac{x+1}{x-3}$$

לכן $\frac{dy}{dx}$ מבוטא לפי x :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{43\left(\frac{x+1}{x-3} - 1\right)^2}{4\left(\frac{x+1}{x-3} + 9\right)^2} = \frac{-43}{(5x-13)^2}$$

ו) $y = \frac{1}{u^2}$, $u = 4v + 9$, $v = \frac{1}{3+x}$

נעזר בכלל השרשרת :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = -\frac{2}{u^3}$$

$$\frac{du}{dv} = 4$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{(3+x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8}{u^3(3x+2)^2} = \frac{8}{(3x+2)^2 \left(\frac{4}{3+x} + 9\right)^3} = \frac{8(x+3)}{(9x+31)^3}$$

זו $x(t) = e^{2t}$ ו $y(t) = \ln(\ln(t))$ שימו לב כי $x(t)$ חח"ע לכן $\frac{dy}{dx}$ מבוטא לפי t :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dy} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{t \ln(t)}}{2e^{2t}} = \frac{1}{2te^{2t} \ln(t)}$$

כעת נרצה לחשב את $\frac{dy}{dx}$ מבוטא לפי x : מכיוון שנתון ש $x(t) = e^{2t}$

$$x(t) = e^{2t} \Rightarrow \ln(x) = 2t$$

$$t = \frac{\ln(x)}{2}$$

לכן $\frac{dy}{dx}$ מבוטא לפי x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(x)e^{\ln(x)} \ln\left(\frac{\ln(x)}{2}\right)} = \frac{1}{x \ln(x) \ln\left(\frac{\ln(x)}{2}\right)}$$

2. $x(t) = \sin(t)$ ו $y(t) = \ln(t)$ כמו כן $\pi \leq t \leq 2\pi$ לכן מכיוון שסינוס בתחום הנ"ל

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dy} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{t}}{\cos(t)} = \frac{1}{t \cos(t)}$$

3. $x = 3t + 1$, $y = \sqrt{x}$ לכן לפי כלל השרשרת נובע :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{3}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{3t+1}}$$

4.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \geq 0 \\ \cos(2x) & x < 0 \end{cases}$$

כאשר a, b ממשיים,

נשים לב שכיוון שהפונקציה גזירה בכל נקודה, הבעיות שעלולה להיווצר היא בנק' התפר כאשר $x = 0$.

נתון שהפונקציה גזירה ב $x = 0$ לכן נחשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = 0$ לפי הגדרת הנגזרת:

$$f'(0) = st \left(\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \right) = st \left(\frac{f(\Delta x) - b}{\Delta x} \right)$$

כעת נחלק למקרים :

(א) אם $\Delta x > 0$ מתקיים ש: $f(\Delta x) = a\Delta x + b$ ולכן :

$$f'(0) = st \left(\frac{f(\Delta x) - b}{\Delta x} \right) = st \left(\frac{a\Delta x + b - b}{\Delta x} \right) = st(a) = a$$

(ב) אם $\Delta x < 0$ מתקיים ש: $f(\Delta x) = \cos(2\Delta x)$ ולכן

$$f'(0) = st \left(\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \right) = st \left(\frac{f(\Delta x) - b}{\Delta x} \right) = st \left(\frac{\cos(2\Delta x) - b}{\Delta x} \right)$$

שימו לב שכדי שהמ"ס המתקבל יהיה סופי חייבים לדרוש ש- $\cos(2\Delta x) - b$ יהיה אנפיניטסימל, כעת לפי הרמז $\Delta x \approx 0$ גורר ש $\cos(2\Delta x) \approx 1$ ולכן הביטוי $\cos(2\Delta x) - b$ יהיה אנפיניטסימל כאשר $b = 1$.

כעת נעזר בזהויות טריגונומטריות : $\cos(2\Delta x) - 1 = -2\sin^2(\Delta x)$ ולכן :

$$f'(0) = st \left(\frac{\cos(2\Delta x) - 1}{\Delta x} \right) = st \left(\frac{-2\sin^2(\Delta x)}{\Delta x} \right) = -2st \left(\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \right) st(\sin(\Delta x)) = 0$$

שימו לב: $st \left(\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \right) = 1$ ו $st(\sin(\Delta x)) = 0$.

כעת כדי ש $f(x)$ תהיה גזירה ב $x = 0$ צריך שהביטוי בתוך בחלק הסטנדרטי לא יהיה תלוי ב Δx לכן נדרוש

$$f'(0) = a = 0$$

לסיכום: $a = 0, b = 1$.

5. $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$ נשים לב ש $x(t)$ חח"ע בתחום ש $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ולכן :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dy} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{\cos(t)}{\sin(t)}$$

נרצה לדעת מתי $\frac{dy}{dx}$ מתאפס, וזה קורה כאשר

$$\cos(t) = 0$$

$$t_k = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

בתחום הנתון רק $k = 0$ נמצא בתחום שבו $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ לכן $t_0 = \frac{\pi}{2}$, כעת נמצא את x המתאים $x = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

6. א) לא נכון, נפריד ע"י דוגמא נגדית $f(x) = 0$ גזירה בנקודה $x = 0$ ו- $g(x) = |x|$ לא גזירה בנקודה $x = 0$ ולכן $f(x) + g(x)$ לא גזירה בנקודה $x = 0$.
 ב) נכון, נוכיח זאת:

נניח בשלילה ש $f(x) + g(x)$ פונקציה גזירה ב x_0 כעת נוכל להציג את $g(x)$ באופן הבא:

$$g(x) = (f(x) + g(x)) + (-f(x))$$

לכן יוצא ש $g(x)$ גזירה בנקודה x_0 כסכום של שתי פונקציות גזירות (הסבר: $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 לפי הנתון ולכן $-f(x)$ גזירה אף היא גזירה בנקודה x_0 , ו- $f(x) + g(x)$ גזירה ב x_0 לפי ההנחה בשלילה לכן הסכום גזיר בנקודה x_0 כסכום של שתי פונקציות גזירות). וזה סתירה שכן לפי הנתון $g(x)$ לא גזירה בנקודה x_0 .

ג) לא נכון, לפי סעיף ב' קיבלנו בה"כ (בלי הגבלת הכלליות) שאם $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 ו- $g(x)$ אינה גזירה בנקודה x_0 אז בהכרח הסכום לא גזיר לכן כן ניתן לקבוע בוודאות.