פתרון תרגיל 4

1. א) $y = \sqrt[3]{(4x+1)}$ נכתוב את הפונקציה $y = (4x+1)^{\frac{1}{3}}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}(4x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{(4x+1)^2}}$$

ב) $y = sin(\sqrt{x})$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

ג) $y = e^{x^3}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^3}3x^2$$

ד) $y = cos(ln(x))$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-sin(ln(x))}{x}$$

ה) $x(t) = \frac{3t+1}{t-1}$ ו- $y(t) = \frac{5t+2}{t+9}$ שימו לב ש $x(t)$ חח"ע ולכן:
$\frac{dy}{dx}$ מבוטא לפי t:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dy} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} == \frac{\frac{5(t+9)-(5t+2)}{(t+9)^2}}{\frac{3(t-1)-(3t+1)}{(t-1)^2}} = \frac{\frac{43}{(t+9)^2}}{-\frac{4}{(t-1)^2}} = -\frac{43(t-1)^2}{4(t+9)^2}$$

כעת נרצה לחשב את $\frac{dy}{dx}$ מבוטא לפי x : נתון ש- $x(t) = \frac{3t+1}{t-1}$ לכן:

$$(t-1)x = 3t+1$$

$$tx - x = 3t+1 \Rightarrow t(x-3) = x+1$$

$$t = \frac{x+1}{x-3}$$

לכן $\frac{dy}{dx}$ מבוטא לפי x :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{43(\frac{x+1}{x-3}-1)^2}{4(\frac{x+1}{x-3}+9)^2} = \frac{-43}{(5x-13)^2}$$

ו) $v = \frac{1}{3+x}$, $u = 4v+9$, $y = \frac{1}{u^2}$

נעזר בכלל השרשרת :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{du}=-\frac{2}{u^3}$$

$$\frac{du}{dv}=4$$

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{(3+x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{8}{u^3(3x+2)^2}=\frac{8}{(3x+2)^2(\frac{4}{3+x}+9)^3}=\frac{8(x+3)}{(9x+31)^3}$$

ז) $x(t)=e^{2t}$ ו $y(t)=ln(ln(t))$ שימו לב כי $x(t)$ חח"ע לכן $\frac{dy}{dx}$ מבוטא לפי t:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dy}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}==\frac{\frac{1}{tln(t)}}{2e^{2t}}=\frac{1}{2te^{2t}ln(t)}$$

כעת נרצה לחשב את $\frac{dy}{dx}$ מבוטא לפי x : נתון ש -$x(t)=e^{2t}$

$$x(t)=e^{2t}\Rightarrow ln(x)=2t$$

$$t=\frac{ln(x)}{2}$$

לכן $\frac{dy}{dx}$ מבוטא לפי x :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{ln(x)e^{ln(x)}ln(\frac{ln(x)}{2})}=\frac{1}{xln(x)ln(\frac{ln(x)}{2})}$$

2. $x(t)=sin(t)$ ו $y(t)=ln(t)$ כמו כן $\pi\leq t\leq 2\pi$ לכן מכיוון שסינוס חח"ע בתחום הנ"ל

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dy}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}==\frac{\frac{1}{t}}{cos(t)}=\frac{1}{tcos(t)}$$

3. $y=\sqrt{x}$, $x=3t+1$ לכן לפי כלל השרשרת נובע :

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{3}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{2\sqrt{3t+1}}$$

4.

$$f(x)=\begin{cases}ax+b & x\geq 0\\ \\ cos(2x) & x<0\end{cases}$$

כאשר a,b ממשיים,

נשים לב שכיוון שהפונקציה גזירה בכל נקודה, הבעיתיות שעלולה להיווצר היא בנק' התפר כאשר $x=0$.

נתון שהפונקציה גזירה ב $x=0$ לכן נחשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=0$ לפי הגדרת הנגזרת:

$$f'(0)=st\left(\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{f(\Delta x)-b}{\Delta x}\right)$$

כעת נחלק למקרים :

א) אם $\Delta x>0$ מתקיים ש : $f(\Delta x)=a\Delta x+b$ ולכן :

$$f'(0)=st\left(\frac{f(\Delta x)-b}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{a\Delta x+b-b}{\Delta x}\right)=st\left(a\right)=a$$

ב) אם $\Delta x<0$ מתקיים ש: $f(\Delta x)=cos(2\Delta x)$ ולכן

$$f'(0)=st\left(\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{f(\Delta x)-b}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{cos(2\Delta x)-b}{\Delta x}\right)$$

שימו לב שכדי שהמ"ס המתקבל יהיה סופי חייבים לדרוש ש- $cos(2\Delta x)-b$ יהיה אנפיניטסימל, כעת לפי הרמז $\Delta x\approx 0$ גורר ש $cos(2\Delta x)\approx 1$ ולכן הביטוי $cos(2\Delta x)-b$ יהיה אנפיניטסימל כאשר $b=1$.

כעת נעזר בזהויות טריגונומטריות : $cos(2\Delta x)-1=-2sin^2(\Delta x)$ ולכן :

$$f'(0)=st\left(\frac{cos(2\Delta x)-1}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{-2sin^2(\Delta x)}{\Delta x}\right)=-2st\left(\frac{sin(\Delta x)}{\Delta x}\right)st(sin(\Delta x))=0$$

שימו לב: $st\left(\frac{sin(\Delta x)}{\Delta x}\right)=1$ ו $st(sin(\Delta x))=0$.

כעת כדי ש $f(x)$ תהיה גזירה ב $x=0$ צריך שהביטוי בתוך בחלק הסטנדרטי לא יהיה תלוי ב Δx לכן נדרוש

$$f'(0)=a=0$$

לסיכום: $a=0,\ b=1$.

5. $x(t)=cos(t)$, $y(t)=sin(t)$ נשים לב ש $x(t)$ חח"ע בתחום ש $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ ולכן :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dy}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{cos(t)}{sin(t)}$$

נרצה לדעת מתי $\frac{dy}{dx}$ מתאפס, זה קורה כאשר:

$$cos(t)=0$$

לכן

$$t_k = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathrm{z}$$

בתחום הנתון רק $k = 0$ נמצא בתחום שבו $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ לכן $t_0 = \frac{\pi}{2}$, כעת נמצא את ה- x המתאים $x = cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

6. א) לא נכון, נפריך ע"י דוגמא נגדית $f(x) = 0$ גזירה בנקודה $x = 0$ ו- $g(x) =\mid x \mid$ לא גזירה בנקודה $x = 0$ ולכן $f(x) + g(x)$ לא גזירה בנקודה $x = 0$.

ב) נכון, נוכיח זאת:

נניח בשלילה ש $f(x) + g(x)$ פונקציה גזירה ב x_0 כעת נוכל להציג את $g(x)$ באופן הבא:

$$g(x) = (f(x) + g(x)) + (-f(x))$$

לכן יוצא ש $g(x)$ גזירה בנקודה x_0 כסכום של שתי פונקציות גזירות (הסבר: $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 לפי הנתון ולכן $-f(x)$ גזירה אף היא גזירה בנקודה x_0, ו-$f(x) + g(x)$ גזירה ב x_0 לפי ההנחה בשלילה לכן הסכום גזיר בנקודה x_0 כסכום של שתי פונקציות גזירות).וזה סתירה שכן לפי הנתון $g(x)$ לא גזירה בנקודה x_0.

ג) לא נכון, לפי סעיף ב' קיבלנו בה"כ (בלי הגבלת הכלליות) שאם $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 ו- $g(x)$ אינה גזירה בנקודה x_0 אז בהכרח הסכום לא גזיר בנקודה x_0 לכן כן ניתן לקבוע בוודאות.