

לינארית להנדסה- תרגיל 12

תרגיל 1. חשבו את הדטרמיננטה הבאה

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & 6 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

תרגיל 2. ידוע כי המספרים 61902, 6327, 86469, 31882, 23028 מתחלקים ב-19 ללא שארית. הראו (ללא חישוב מפורש) ש-

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 7 & 9 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

גם כן מתחלק ב-19 ללא שארית. רמז: שימו לב שעמודות במטריצה הן המספרים המוזכרים בשאלה

תרגיל 3. יהא \mathbb{R}^n עם המכפלה הסקלארית. ויהא $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס אוני. נגדיר מטריצה $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך: עמודה j של

המטריצה P הוא הוקטור v_j . כלומר $P = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

1. הוכיחו כי $P^t P = I$

2. הוכיחו $\det(P) \in \{1, -1\}$

תרגיל 4. מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ נקראת בלוק ג'ורדן (אין זה מתייחס לחסימה של מייקל ג'ורדן) מסדר n

עם סקלר α מצאו את העי"ע והווקטורים העצמים של בלוק ג'ורדן מסדר 4, משמע המטריצה $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

תרגיל 5. יהיה v וקטור עצמי של המטריצה A ששייך לערך העצמי λ .

1. הראה שהווקטור x הוא גם ווקטור עצמי של המטריצה A^k ($k \in \mathbb{N}$) ששייך לערך עצמי λ^k .

2. הראה שהווקטור x הוא גם ווקטור עצמי של המטריצה $A^3 - 2A + I$ ששייך לערך עצמי $\lambda^3 - 2\lambda + 1$.

3. הראה שאם $\lambda \neq 0$ אז x הוא ווקטור עצמי גם של A^{-1} (הנחה ש- A הפיכה)

תרגיל 6. הוכיחו ש- A לא הפיכה אם ורק אם קיים לה עי"ע $\lambda = 0$

תרגיל 7. עבור אילו ערכי a המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה

1. מעל \mathbb{R}

2. מעל \mathbb{C}

תרגיל 8. עבור אילו ערכי k המטריצה $\begin{pmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ -k-3 & k & k+3 \\ -k-3 & k & k+3 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה מעל \mathbb{R}

תרגיל 9. הוכח או הפרך: האם העתקות הבאות הן העתקות לנאריות?

1. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ -3y \end{pmatrix}$$

2. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x+2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. תהי $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה כלשהי. תהי $T: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ נגדיר

$$T(A) = AB - BA$$

תרגיל 10. תהי T העתקה לינארית הוכיחו ש-

1. $T(0) = 0$

2. יהיו v_1, \dots, v_n כך ש- $T(v_1), \dots, T(v_n)$ בת"ל הוכח ש- v_1, \dots, v_n גם כן בת"ל

3. יהיו v_1, \dots, v_n בת"ל ו- T ה"ל חח"ע (כמו שהוגדר בבדידה) הוכיחו ש- $T(v_1), \dots, T(v_n)$ בת"ל

תרגיל 11. מצאו הע"ל $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ כך ש- $\{1+2x, x^2+x\}$ $Im(T)$ ו- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $ker(T)$

בהצלחה!!