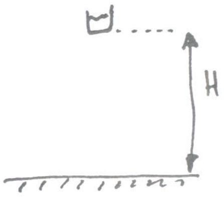
(I)

פיסיקה קלאסית 1 - תרגיל 3

(1) נסתכל על המקרה של צופה אינרציאלי:



כוס

$a=-g\hat{y}$

$v_0=v$

$y_0=H$

$$y=H+vt-\frac{1}{2}gt^2$$

מעלית

$a=a\hat{y}$

$v_0=v$

$y_0=0$

$$y=vt+\frac{1}{2}at^2$$

א. ברגע ההתנגשות

$$y_{\text{מעלית}}=y_{\text{כוס}} \rightarrow \cancel{vt}+\frac{1}{2}at^2=H+\cancel{vt}-\frac{1}{2}gt^2$$

$$\frac{1}{2}t^2(a+g)=H$$

$$t^2=\frac{2H}{g+a} \rightarrow t=\sqrt{\frac{2H}{g+a}}$$

ב. המהירות היחסית היא:

$$v_{\text{כוס}}=v-gt \qquad v_{\text{מעלית}}=v+at$$

$$\Delta v=\cancel{v}-gt-(\cancel{v}+at)=-t(g+a)=-(g+a)\sqrt{\frac{2H}{(g+a)}}=-\sqrt{2H(g+a)}$$

ג. העתק הכוס עד רגע ההתנגשות:

$$\left.\begin{aligned} y_{\text{כוס}}&=H+vt-\frac{1}{2}gt^2\\ t&=\sqrt{\frac{2H}{(g+a)}}\end{aligned}\right\} \rightarrow y_{\text{כוס}}-y_{\text{כוס}(t=0)}=\cancel{H}+vt-\frac{1}{2}gt^2-\cancel{H}=vt-\frac{1}{2}gt^2=v\sqrt{\frac{2H}{g+a}}-\frac{1}{\cancel{2}}g\cdot\frac{\cancel{2}H}{(g+a)}$$

$$=\frac{v\sqrt{2H(g+a)}-gH}{(g+a)}$$

(*) עבור צופה המצוי במעלית: הכוס "בשפה" של המעלית הוא:

$$y_{\text{כוס}}-x_{\text{מעלית}}=H+\cancel{vt}-\frac{1}{2}gt^2-(\cancel{vt}+\frac{1}{2}at^2)=H-\frac{1}{2}t^2(g+a)$$

מתוך הביטוי שהתקבל למשוואת המקום "בשפת" המעלית של הכוס.
ניתן לראות כי צופה במעלית רואה את הכוס "נופלת" על הרצפה מגובה H, ו"בתאוצת כובד" g+a.

א. ברגע ההתנגשות

$$\left\{\begin{aligned} y&=H-\frac{1}{2}t^2(g+a)\\ y&=0\end{aligned}\right. \Rightarrow 0=H-\frac{1}{2}t^2(g+a)$$

$$t^2=\frac{2H}{g+a} \rightarrow t=\sqrt{\frac{2H}{g+a}}$$

ב. המהירות היחסית היא:

$$y=H-\frac{1}{2}t^2(g+a)$$

$$v=0-t(g+a)=-t(g+a) \rightarrow v=-\sqrt{2H(g+a)}$$

ג. ההעתק שעברה הכוס:

$$y(t)=H-\frac{1}{2}t^2(g+a) \xrightarrow{t=0} y(t=0)=H$$

$$\left.y\left(t=\sqrt{\frac{2H}{g+a}}\right)=0\right\} \Rightarrow \Delta y=H$$

(2) נתון:

$\vec{r}_A = (2t+1, -7t+2, 3t+9)$

$\vec{r}_B = (3t+2, 4t-5, t+1)$

א. כיוון התקדמות הוא כיוון המהירות, לכן נחפש את המהירות ובעזרת מכפלה סקלארית נוכל למצוא את הזווית המבוקשת.

$\vec{v}_A = (2, -7, 3)$

$\vec{v}_B = (3, 4, 1)$

$$\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B = |\vec{v}_A||\vec{v}_B| \cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{r}_A \cdot \vec{r}_B}{|\vec{r}_A||\vec{r}_B|}$$

$|\vec{r}_A| = \sqrt{4+49+9} = \sqrt{62}$

$|\vec{r}_B| = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$

$\vec{r}_A \cdot \vec{r}_B = (2,-7,3)\cdot(3,4,1) = 6-28+3 = -19$

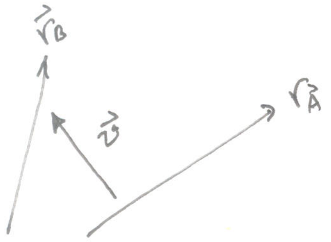
$$\cos\theta = \frac{-19}{\sqrt{62}\sqrt{26}} = -0.473$$

$$\boxed{\theta = 1.077 \text{ rad}}$$

ב. מהירות רכב A יחסית לרכב B הינה

$$\boxed{\Delta(\vec{v}_A - \vec{v}_B) = (2-3, -7-4, 3-1) = (-1, -11, 2)}$$

ג. לפני שנחשב את המהירויות נסתכל על המקרה הכללי.



מהציור ברור לנו כי $\vec{B} = \vec{A} + \vec{v}$

ולכן $\vec{B} - \vec{A} = \vec{v}$

מתוך כך נסתכל על ההעתק היחסי לפי A:

$$\Delta(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = t+1, 11t-7, -2t-8$$

מכאן גם אנו נמצא את המהירות היחסית לפי A $\vec{v}_{BA} = 1, 11, -2$ או לפי B: $\vec{v}_{AB} = -1, -11, 2$

הדרך שעשתה האוטו ב-5 שנ' הינה:

$$\Delta(\vec{r}_B - \vec{r}_A)\Big|_{t=5} = 5+1, 55-7, -10-8 = 6, 48, -18$$

מאחר והמהירות קבועה אני מקבל את ז מקור המהירות (לפי $\vec{A}$)

$$\boxed{v = \frac{\Delta(\vec{r}_B - \vec{r}_A)}{t\,(=5)} = \frac{6}{5}, \frac{48}{5}, -\frac{18}{5}}$$

כדי לעבור ל"שיטת" $\vec{B}$ נצטרך להציב:

$v_{AB} = -1, -11, 2$

$$\boxed{v_{B\text{ לפי}} = v_{AB} + v_{A\text{ לפי}} = (-1,-11,2) + \left(\frac{6}{5}, \frac{48}{5}, -\frac{18}{5}\right) = \frac{-5+6}{5}, \frac{-55+48}{5}, \frac{10-18}{5} = \frac{1}{5}, \frac{-7}{5}, \frac{-8}{5}}$$

ד. כבר כתבנו את המיקום בצורה כללית:

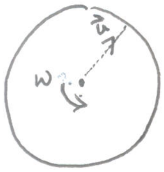
$$\Delta\vec{r}_{BA} = t+1, 11t-7, -2t-8$$

ולכן ב $t=3$:

$$\boxed{\Delta\vec{r}_{BA}\Big|_{t=3} = 3+1, 33-7, -6-8 = (4, 26, -14)}$$

(III)

(3) נגדיר את התנועה בעזרת הציור:



$\hat{r} = (\cos\theta, \sin\theta) \rightarrow \hat{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta)$

$\theta = \omega t \rightarrow \dot{\theta} = \omega \rightarrow \ddot{\theta} = 0$

$r = ut \rightarrow \dot{r} = u \rightarrow \ddot{r} = 0$

כפי שפתחנו בכיתה

$\vec{r} = r\hat{r}$

$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

$\vec{a} = \hat{r}(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \hat{\theta}(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$

נציב למקרה שלנו:

$\vec{v} = u\hat{r} + r\omega\hat{\theta}$

$\vec{a} = \hat{r}(0 - r\omega^2) + \hat{\theta}(2u\omega + 0) = -r\omega^2\hat{r} + 2u\omega\hat{\theta}$

ניתן גם להציג בעזרת $\hat{x}, \hat{y}$:

$\vec{v} = u(\cos\theta, \sin\theta) + r\omega(-\sin\theta, \cos\theta) = \hat{x}(u\cos\theta - r\omega\sin\theta) + \hat{y}(u\sin\theta + r\omega\cos\theta)$

$\vec{a} = -r\omega^2(\cos\theta, \sin\theta) + 2u\omega(-\sin\theta, \cos\theta) = \hat{x}(-r\omega^2\cos\theta - 2u\omega\sin\theta) + \hat{y}(-r\omega^2\sin\theta + 2u\omega\cos\theta)$

(4) נתון $a = -b^2 x$ פרופורציונלית: מאחר ו- $\frac{d^2}{dt^2}x = a = \ddot{x}$ אז נקבל שלפנינו משוואה

$$\ddot{x} + b^2 x = 0$$

ראינו בכיתה כי במקרה זה ניתן לנחש פתרון שהוא סכום של פתרונות של קוסינוס וסינוס ולכן:

$X(t) = A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t)$

מתנאי התחלה:

$X(t=0) = X_0 = A\cos(0) + B\sin(0) = A \rightarrow \boxed{A = X_0}$

המהירות היא נגזרת של המיקום

$v(t) = -\alpha\sin(\alpha t) + \alpha B\cos(\alpha t)$

ומתנאי התחלה:

$v(t=0) = v_0 = -\alpha X_0\sin(\alpha t) + \alpha B\cos(0)$

$v_0 = \alpha B \rightarrow \boxed{B = \frac{v_0}{\alpha}}$

התאוצה היא נגזרת של המהירות

$\vec{a} = -\alpha^2 X_0\cos(\alpha t) - \alpha^2\frac{v_0}{\alpha}\sin(\alpha t) = -\alpha^2\left(X_0\cos(\alpha t) + \frac{v_0}{\alpha}\sin(\alpha t)\right) = -\alpha^2 X$

$\boxed{\alpha = b}$

והפתרון הכללי הינו

$X(t) = X_0\cos(bt) + \frac{v_0}{b}\sin(bt)$

$v(t) = -bX_0\sin(bt) + v_0\cos(bt)$

$a(t) = -b^2X_0\cos(bt) - bv_0\sin(bt)$

(IV)

(5)

נתון: $M=5kg$

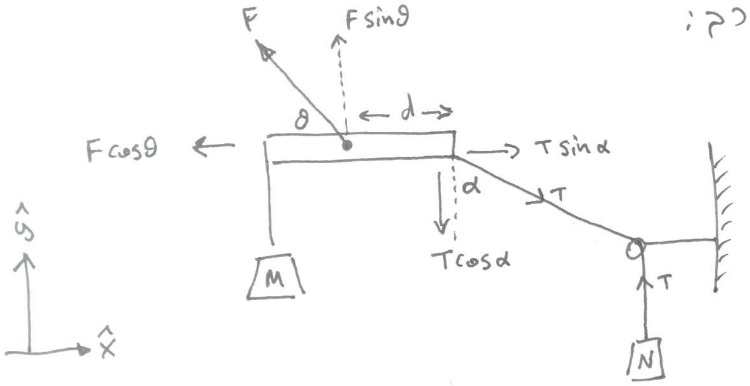
$N=2kg$

$L=3m$

מאחר ומצוין כי אני מחפשת את הכוח שחסר על מנת להגיע לשיווי משקל, לכן נגדיר כ-F הנמצא במרחק d מהקצה הימני. ובזווית θ.

מאחר וקיים על הגוף כוח לפי ימין הרי שברור שעל הכוח החסר להיות בעל רכיב לכיוון שמאל ומעלה.

על כן הציור יראה כך:



(כמו כן נגדיר את זווית α)

נסתכל על המסה N:

בשיווי משקל $\sum F_y = 0$

$$\sum F_y = T - Ng = 0$$

$$\boxed{T = Ng} \quad (i)$$

א. אם נענה על סעיפים ב' וג' גם נוכל לענות על א.

ב. עתה נסתכל על המוט, מאחר ומדובר במערכת שנמצאת בשיווי משקל: $\sum \vec{F} = 0$ ו- $\sum \vec{\tau} = 0$

$$\sum F_x = T\sin\alpha - F\cos\theta = 0$$

$$\boxed{F = T\frac{\sin\alpha}{\cos\theta}} \quad (ii)$$

$$\sum F_y = F\sin\theta - Mg - T\cos\alpha = 0$$

$$T\frac{\sin\alpha}{\cos\theta}\cdot\sin\theta - T\cos\alpha = Mg$$

$$T(\sin\alpha\tan\theta - \cos\alpha) = Mg$$

$$\left.\begin{aligned} \tan\theta &= \left(\frac{Mg}{T} + \cos\alpha\right)\frac{1}{\sin\alpha} \\ T &= Ng \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{Mg}{Ng} + \cos\alpha\right) = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{5}{2} + \cos\alpha\right)} \quad (iii)$$

ג. ניתן להציב במשוואה (ii) את הנתונים מ-(i) ומ-(iii);

אם נזכור כי $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$

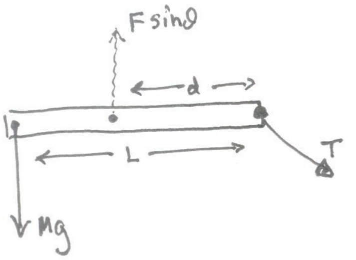
$$F = Ng\frac{\sin\alpha}{\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}} = Ng\sin\alpha\sqrt{1+\tan^2\theta} \quad Ng\sin\alpha\sqrt{1+\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{5}{2}+\cos\alpha\right)^2} =$$

$$= Ng\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{25}{4} + 5\cos\alpha + \cos^2\alpha} = Ng\sqrt{1+\frac{25}{4}+5\cos\alpha} = \frac{Ng}{2}\sqrt{29+20\cos\alpha} = (9.8)\sqrt{29+20\cos\alpha} =$$

$$\boxed{F \approx 10\sqrt{29+20\cos\alpha}}$$

(V)

ג. כדי למצוא את הנקודה בו מופעל F, נסתכל על סכום מומנטי הכוח.
נבחר את הצד הימני של המוט כציר הסיבוב ולכן:



$$\Sigma \tau = L(Mg) + d(-F\sin\theta) + \cancel{(0)\cdot T}^{\,0} = 0$$

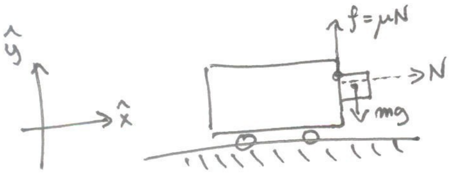
$$d = L\frac{Mg}{F\sin\theta} = L\frac{M\cancel{g}}{N\cancel{g}\sin\alpha\sqrt{1+\tan^2\theta}} =$$

$$= L\frac{M}{N}\frac{1}{\sin\alpha\sqrt{1+\tan^2\theta}} = L\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{29+20\cos\alpha}} =$$

$$\boxed{d = 15\frac{1}{\sqrt{29+20\cos\alpha}}}$$

(*) נבדוק את התשובות שהתקבלו: עבור $\alpha=0$ נקבל $\tan\theta=\infty$
$\downarrow$
$\theta=\frac{\pi}{2}$ ← הגיוני שכאן אין רכיב בכיוון $\hat{x}$ ✓
ל-T, אז ל-F אין רכיב ב-$\hat{x}$ גם.
בדיקת יחידות של d מראה כי ל-L יש יחידות של מרחק ולכן השבר חסר יחידות ✓.

(ב) נסתכל על שקול הכוחות:



$$\Sigma F_x = ma_x \longrightarrow \Sigma F_x = N = ma$$

$$\boxed{N = ma} \quad (i)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma F_y = f - mg = \mu N - mg = 0$$

$$\mu N = mg$$

נציב את (i)

$$\mu \cancel{m} a = \cancel{m} g$$

$$\boxed{a = \frac{g}{\mu}}$$

* בדיקת יחידות: ל-a ול-g (שניהם תאוצות) אותן יחידות ✓.
μ חסר יחידות