שיעורי בית 2

20 בנובמבר 2016

1. נגדיר M להיות כל המטריצות מגודל $\infty \times \infty$ עם רכיבים ממשיים שמקיימות שבכל שורה ובכל עמודה יש מספר סופי של איברים שונים מאפס. כלומר

$$M = \left\{ (a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty\times\infty} \mid [\forall i : \#\{a_{i,j} \neq 0 : j \in \mathbb{N}\} < \infty] \wedge [\forall j : \#\{a_{i,j} \neq 0 : i \in \mathbb{N}\} < \infty] \right\}$$

על M נגדיר פעולה של בדומה לכפל במטריצות מגודל סופי. כלומר לכל $A, B \in M$ את הכפל בניהם ע"י

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} b_{kj}$$

למשל $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \\ & \ddots & & \end{pmatrix}$ ו $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \\ & \ddots & & \end{pmatrix}$ שניהם שייכים ל M והכפל בניהם $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \\ & \ddots & & \end{pmatrix}$

(א) הוכיחו כי הפעולה מוגדרת היטב, כלומר $AB \in M$

(ב) הוכיחו כי ביחס לפעולה זאת M הוא מונואיד.

(ג) מצאו דוגמא לאיבר $A \in M$ שיש לו הפיך ימיני אך אין לו הפיך שמאלי

2. הכרה של עוד חבורות:

(א) הקווטרניונים: נגדיר

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

8 מטריצות מרוכבות. עובדה: קבוצה זאת ביחס למכפלת מטריצות היא חבורה. האם חבורה זאת חילופית?

(ב) המרוכבים: נגדיר

$$G=\left\{A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}:\ det(A)=a^2+b^2\neq 0\right\}$$

הוכיחו כי קבוצה זאת ביחס למכפלת מטריצות היא חבורה. האם חבורה זאת חילופית?

3. תהא G חבורה. נגדיר יחס עליה כך

$$g_1\sim g_2 \iff \exists x\in G:\ xg_1x^{-1}=g_2$$

ליחס זה קוראים יחס ההצמדה או יחס צמידות. (מינוח: מחלקת שקילות של יחס ההצמדה נקראת מחלקת צמידות)

(א) הוכח כי ~ יחס שקילות על G.

(ב) עבור $G=S_n$ ויחס ההצמדה: הוכיחו כי מתקיים $[(1,2)]=\{(i,j)\mid 1\leq i<j\leq n\}=\{(i,j)\mid 1\leq i\neq j\leq n\}$ כאשר $[(1,2)]$ זה מחלקת השקילות של $(1,2)$ של יחס ההצמדה [רמז: ש.ב. משבוע שעבר]. הסיקו כמה איברים יש במחלקת השקילות של $(1,2)$?

4. הגדרה: תהא G חבורה. נסמן את המרכז של G ב$Z(G)=\{g\in G\mid \forall x\in G:\ gx=xg\}$. המרכז של Gזה כל האיברים ב G שמתחלפים עם כל איבר אחר.

(א) הוכיחו כי $Z(G)$ חבורה. והוכיחו כי זוהי חבורה חילופית.

(ב) לכל $g\in G$ מצאו את גודל מחלקת הצמידות של g

5. תהא G חבורה בה מתקיים $\forall g_1,g_2\in G:(g_1g_2)^2=g_1^2g_2^2$.
הוכח כי G חבורה חילופית.

6.

(א) ראינו בתירגול כי הגדרה שקולה ל $\mathbb{Z}_n$. נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{Z}$ ע"י

$$x\equiv y \iff n|x-y$$

את קבוצת המנה ניתן להציג כ

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{[0],[1],\ldots,[n-1]\}$$

והגדרנו את הפעולה

$$[a]+[b]=[a+b]$$

שאיתה נקבל חבורה חיבורית $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+\right)$. כעת נגדיר עוד פעולה על קבוצה זאת: לכל $[a],[b]\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ נגדיר פעולת כפל

$$[a][b]=[ab]$$

הוכיחו כי פעולה זאת מוגדרת וביחס אליה נקבל כי $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\cdot\right)$ מונואיד.

(ב) בעזרת סעיף קודם חשבו את

$$7^n-3^n \mod 8$$

לכל n טבעי.