

אלגברה לינארית 2 (88113) – מבחן לדוגמה פרופ' רון עדין

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות, כל שאלה בעמוד נפרד. כל השאלות שוות משקל.
ניתן לסמן עמודים כ"טיוטה".
נא להסביר ולנמק בבירור את כל הפתרונות.

בהצלחה!

1.

- א. הגדירו: הצגה של העתקה לינארית ביחס לזוג בסיסים.
ב. תהי $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקה לינארית המיוצגת, ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של \mathbb{R}^3 ושל \mathbb{R}^2 , על ידי המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

מצאו את $\ker T$ ואת $\operatorname{im} T$.

- ג. האם קיימים בסיסים של \mathbb{R}^3 ושל \mathbb{R}^2 שביחס אליהם T מהסעיף הקודם

מיוצגת על ידי המטריצה $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? נמקו.

2.

- א. הגדירו: ערך עצמי, וקטור עצמי (של מטריצה).
ב. נסמן ב- $\sigma(A)$ את הספקטרום (קבוצת הערכים העצמיים) של מטריצה ריבועית A . הוכיחו, לכל $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$: $\sigma(AB) = \sigma(BA)$. התייחסו במפורש למקרה של ערך עצמי 0.
ג. תנו דוגמה של מטריצות A, B כך ש- $AB=0$ אבל $BA \neq 0$. הסבירו מדוע דוגמה זו אינה סותרת את הטענה בסעיף הקודם.

3.

- א. הגדירו: קבוצה אורתונורמלית, תת-מרחב ניצב.
ב. מצאו בסיס אורתונורמלי $\{e_1, e_2, e_3\}$ של \mathbb{R}^3 (עם המכפלה הסקלרית הרגילה) כך ש-
 $\operatorname{span}\{e_1\} = \operatorname{span}\{(1, 0, 1)\}$, $\operatorname{span}\{e_1, e_2\} = (\operatorname{span}\{(1, 1, -1)\})^\perp$

4. תהי $q(x, y) = x^2 - 6xy + 9y^2$ תבנית ריבועית מעל \mathbb{R} .
א. מצאו עבור $q(x, y)$ מטריצה מייצגת סימטרית A .
ב. מצאו מטריצה אלכסונית הדומה אורתוגונלית ל- A .
ג. תארו במילים את אוסף הפתרונות של המשוואה $q(x, y) = 5$ (למשל: אליפסה, פרבולה, זוג ישרים נחתכים וכו'). נמקו.

.5

- א. הגדירו: אופרטור הרמיטי, אנטי-הרמיטי, אוניטרי.
- ב. יהיו: V מרחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{C} , $T: V \rightarrow V$ אופרטור אנטי-הרמיטי. הוכיחו: כל ערך עצמי של T הוא מדומה טהור.
- ג. עבור T כמו בסעיף הקודם נגדיר: $S = (I - T)^{-1}(I + T)$. הוכיחו: S אופרטור אוניטרי.